



With the Compliments
of
The Cultural Counsellor
of
The Iranian Embassy
New Delhi.

Call No. — — — —

Acc. No. — — — —

[illegible]

1. An overdue charge of 10/20 Paisa will be levied if the book is kept beyond the

172
172.1

530
/

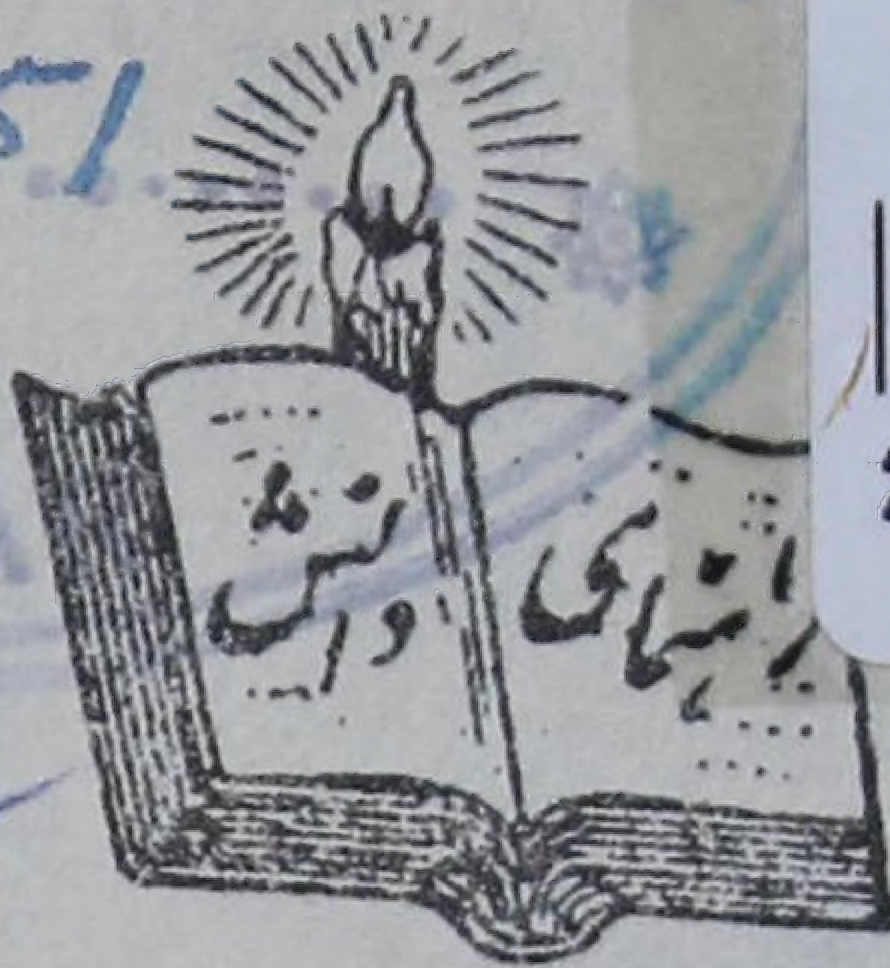
W

سیر شک - انواری

LIBRARY
No. 2597...

Date. 2.5.51

SRINAGA



ALLAMA IQBAL LIBRARY



2597

خلاصہ ماہنامہ
مشروط

چاپ اول - ۱۴۲۶

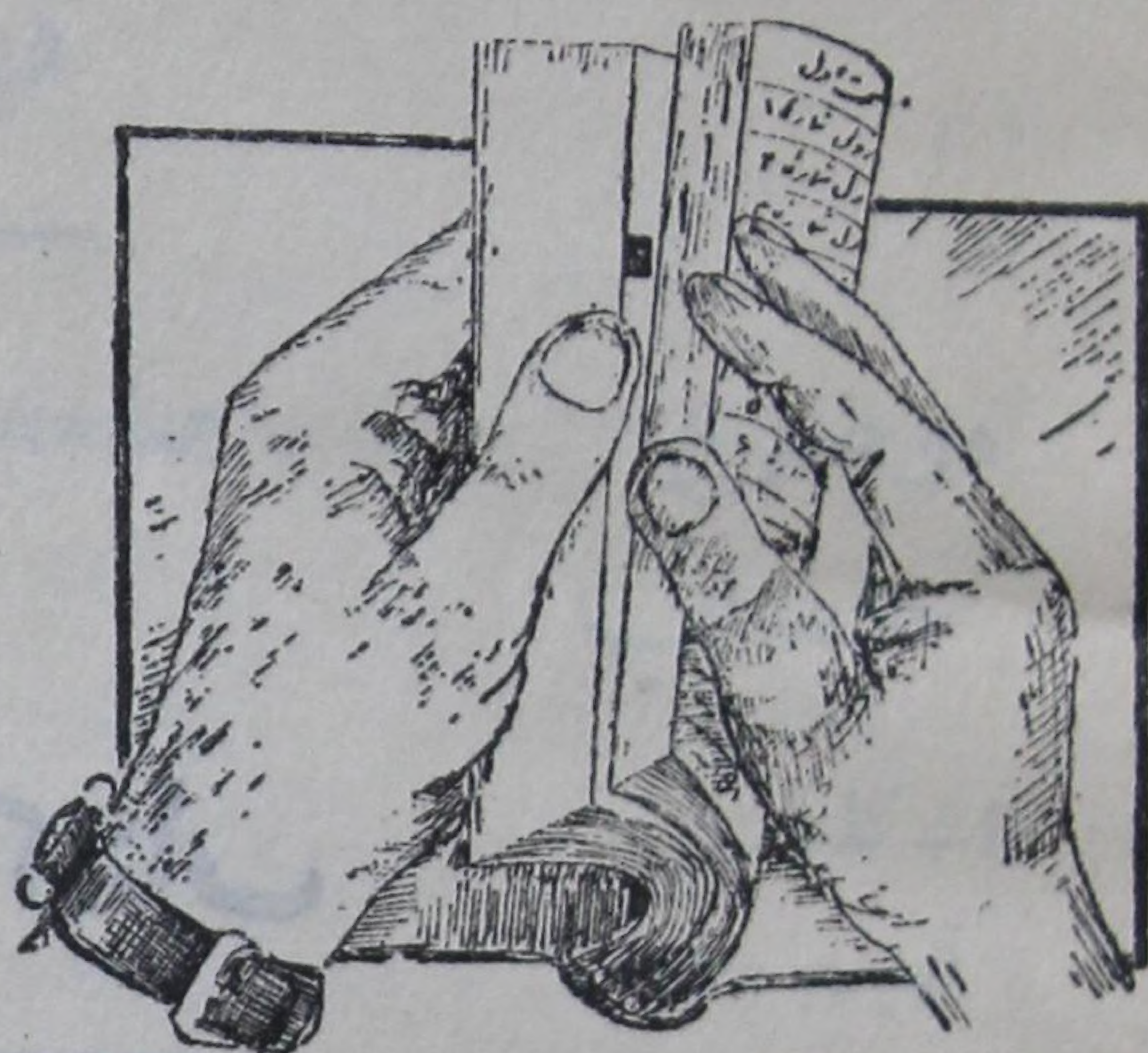
P510

۱ ۹۱ خ

حق چاپ و استفاده از کلیشه ها

محفوظ است

راهنمای کتاب



لب کتاب را بطوریکه
در شکل بالا می بینید
کمی باز کنید ؛ نشانی
سیاهی که در مقابل
علامت - > این صفحه
بمحاذات هر قسمت
نمودار میشود صفحه اول
آن قسمت از مطالب
کتاب است انگشت
شست دست چپ را روی
نشانی سیاه بگذارید
و قسمتی را که

حساب

از صفحه ۱ تا صفحه ۳۸

جبر

از صفحه ۳۹ تا ۱۲۸

مثلثات

از صفحه ۱۲۹ تا ۱۶۳

هندسه

از صفحه ۱۶۴ تا ۲۳۶

مخروطات

از صفحه ۲۳۶ تا ۲۵۴

مکانیک

از صفحه ۲۸۴ تا ۳۱۹

هندسه ر قومی و تریسیمی

از صفحه ۲۵۴ تا ۲۸۳

هیئت

اهداء کتاب

این کتاب را بکسانیکه برای
پیشرفت فرهنگ کمر همت
بسته و با روحی پاک در این
راه مردانه می‌کوشند تقدیم
می‌کنیم

فهرست

موضوع	صفحه	موضوع	صفحه
قابلیت تقسیم بر ۲ و ۳ و ۴	۷	حساب	
قابلیت تقسیم بر ۵ و ۹ و ۱۱	۸	I- کلیات	۱
IX- اعداد اول	۸	کمیت	۱
اعداد اول از ۱ تا ۱۰۰۰	۹	عدد	۱
X- بزرگترین مقسوم علیه		پایه شمار	۱
مشترك	۱۰	II- جمع	۲
تعیین بعم از راه نردبانی	۱۱	امتحان جمع	۲
» » از راه تجزیه	۱۱	III- تفریق	۳
XI- کوچکترین مضرب		امتحان تفریق	۲
مشترك	۱۱	IV- ضرب	۳
تعیین کم از راه تجزیه	۱۲	امتحان ضرب	۴
XII- کسر	۱۲	V- تقسیم	۴
کسر متعارفی و اعشاری	۱۲	امتحان تقسیم	۵
کسر نما	۱۳	VI- قوای اعداد	۵
خواص عمومی	۱۳	ضرب و تقسیم قوا	۶
چهار عمل اصلی در کسر	۱۵	VII- مساوی و نامساوی	۶
تبدیل کسر اعشاری به متعارفی		چهار عمل اصلی در مساوی	۶
و بالعکس	۱۶	» » نامساوی	۷
کسر متناوب	۱۶	VIII- قابلیت تقسیم	۷
XIII- نسبت و تناسب	۱۸		

صفحه	موضوع
۲۸	XVIII-آمیزه
۲۹	آلیاژ
۲۹	XIX-مربحه مفرد
۳۰	فورمولهای مربحه
۳۰	XX-تنزیل
۳۱	فورمول تنزیل
۳۱	XXI-جنر
۳۲	استخراج جنر اعداد صحیح
۳۳	» » » اعشاری
۳۳	تقریب
۳۴	امتحان جنر
۳۴	XXII-کعب
۳۵	استخراج کعب اعداد صحیح
۳۶	» » » اعشاری
۳۶	XXIII-اعداد اصم
۳۷	ضرب و تقسیم ریشه دوم (جنر)
	جبر
۳۹	I-تعاریف
۳۹	حروف و نشانه ها
۴۰	عدد جبری
۴۱	عبارت جبری
۴۱	اتحاد

صفحه	موضوع
۱۹	واسطه عددی
۲۰	XIV-مقیاسها
۲۰	واحد طول در دستگاه متری
۲۰	واحد سطح در دستگاه متری
۲۱	» حجم
۲۱	» پیمانه
۲۱	» وزن
۲۲	رابطه بین وزن و حجم
۲۲	وزن مخصوص
۲۳	واحد پول
۲۴	XV-مقیاسهای سابق ایران
۲۴	واحد طول
۲۴	» وزن
۲۴	رابطه بین مقیاسهای فعلی و قدیم
۲۵	واحد زمان
۲۵	اقسام سال
۲۵	تعدیل
۲۶	مطابقت تاریخها
۲۶	XVI-اعداد مرکب
	چهار عمل اصلی در اعداد مرکب
۲۶ و ۲۷	
۲۷	XVII-اربعه متناسبه
۲۸	تناسب مستقیم و معکوس

موضوع صفحه

گویا نمودن کسر اصم ۵۲

XIII - معادلات ۵۲

خواص معادلات ۵۳

حل و بحث معادلات درجه اول ۵۳

حل دستگاه دو معادله دو ۵۴

مجهولای درجه اول ۵۴

معادله درجه دوم ۵۵

روابط بین ضرائب و ریشه ۵۵

های معادله درجه دوم ۵۵

حاصل جمع قوای متشابه ریشه ۵۶

های معادله درجه ۵۶

علامت ریشه های معادله درجه دوم ۵۶

XIV - سه جمله درجه دوم ۵۸

مقایسه يك يا دو عدد با ریشه ۵۸

های سه جمله درجه دوم ۵۹

مقایسه ریشه های دو سه جمله ۵۹ و ۶۰

XV - معادلات قابل تبدیل به ۶۱

معادله درجه دوم ۶۱

معادله دو مجذوری ۶۱

معادلات معکوسه ۶۱

حل معادلات معکوسه ۶۲

موضوع صفحه

معادله ۴۱

یکجمله ۴۱

ضریب ۴۱

چند جمله ۴۲

II - جمع اعداد جبری ۴۲

III - تفریق اعداد جبری ۴۲

IV - ضرب اعداد جبری ۴۲

V - تقسیم اعداد جبری ۴۲

VI - قوه (توان) ۴۳

ضرب و تقسیم قوا ۴۳

قوه کسری ۴۴

قوه منفی ۴۴

VII - جمع جمل جبری ۴۵

VIII - تفریق جمل جبری ۴۵

IX - ضرب جمل جبری ۴۵

X - تقسیم جمل جبری ۴۶

قابلیت تقسیم کثیرالجمله از x بر $(x \pm \dots)$ ۴۷

XI - اتحاد های مهم ۴۷ و ۴۸

XII - ریشه وریشگی ۴۹

ریشه اعداد جبری ۴۹

تحویل چند ریشگی بيك ۴۹

نماینده ۵۰

ضرب و تقسیم ریشگی ۵۰

موضوع

صفحه

معادلات معکوسه درجه ۳ و ۴ و ۵	۶۲
معادلات اصم	۶۴
XVI- نامساوی	۶۵
خواص نامساوی	۶۵
نامساوی درجه اول يك	
مجهولی	۶۵
نامساوی درجه دوم	۶۶
نامساوی درجه m ام	۶۶
نامساوی کسری	۶۷
XVII- تصاعد حسابی	۶۷
XVIII- تصاعد هندسی	۶۹
XIX- لگاریتم	۷۰
خواص لگاریتم	۷۱
چهار عمل اصلی در لگاریتم	۷۴
جدولهای لگاریتم	۷۶
مانتیس لگاریتم اعداد از ۱ تا ۱۰۰	۷۷
XX- ربح مرکب	۷۸
XXI- قسط السنین	۷۸
XXII- نمایش هندسی	۸۰
مختصات دکارتی	۸۱
مختصات قطبی	۸۲
بستگی بین مختصات قطبی	

موضوع

صفحه

و قائم	۸۲ و ۸۳
مختصات گروی	۸۳
تغییر محورهای مختصات	۸۳
دوران و حررها	۸۴
طول قطعه خط	۸۴
تقسیم خط به نسبت K	۸۵
رابطه شال	۸۵
رابطه فیثاغورث	۸۶
« اولر	۸۶
« استوارت	۸۶
XXIII- متغیر و تابع	۸۷
اقسام تابع	۸۷ و ۸۸
XXIV- حدود	۸۸
خواص حدود	۸۹
XXV- رفع ابهام	۸۹
XXVI- مشتقات	۹۱
محاسبه مشتق	۹۲
مشتق توابع متداول	۹۳
خواص مشتق	۹۵
رفع ابهام بوسیله مشتق	۹۵
XXVII- تغییرات توابع	۹۶
تغییرات تابع درجه اول	۹۶
ماکزیمم و می نیمم	۹۷
تغییرات تابع درجه دوم	۹۸

موضوع

صفحه

xxix- حل معادلات بوسیله رسم	۱۱۴
منحنی	۱۱۴
xxx- حل نامعادلات بوسیله	۱۱۵
منحنی	۱۱۵
حل دستگاه نامعادلات	۱۱۶
xxxI- تابع اولیه	۱۱۶
سطح محصور	۱۱۸
متمم جبر	
xxxII- معادله منحنی های	
مخصوص	۱۱۹
معادله دایره	۱۱۹
» بیضی	۱۱۹
» هذلولی	۱۲۰
» معادله سهمی	۱۲۰
xxxIII- حل معادلات دو جمله و	
سه جمله	۱۲۰
xxxIV- قاعده بزو برای حل	
معادلات چند مجهولی درجه	
اول	۱۲۱
xxxV- معادلات مجهول القوی	
و الگاریتمی	۱۲۳
xxxVI- تجزیه رادیکالهای	
مرکب	۱۲۴
حل معادله درجه سوم	۱۲۵

موضوع

صفحه

تغییرات تابع دو مجذوری	۹۹
xxVII- نمایش هندسی توابع	۱۰۱
نمایش تغییرات تابع درجه	
اول	۱۰۱
ضریب زاویه ای	۱۰۲
زاویه دو خط	۱۰۳
معادله خط ماربریک یا دو	
نقطه	۱۰۳
فاصله نقطه از خط	۱۰۴
رسم خط	۱۰۴
فصل مشترک دو خط	۱۰۴
مجانبتها	۱۰۴
قاعده برای پیدا کردن	
مجانبتها	۱۰۵
تقعر و تحدب	۱۰۶
نقطه عطف	۱۰۶
مرکز و محور تقارن	۱۰۷
طرز تعیین محور تقارن	۱۰۷
» » مرکز تقارن	۱۰۸
مماس بر منحنی	۱۰۹
ضریب زاویه ای مماس بر	
منحنی	۱۰۹
رسم مماس بر منحنی	۱۰۹
رسم منحنی	۱۱۰

مثلثات

I- کلیات

۱۲۹

اندازه قوس

۱۲۹

رابطه بین درجه و گراد و

۱۳۰

رادیان

۱۳۰

دائره مثلثاتی

۱۳۱

قضیه شال

۱۳۱

قوسهای متمم و مکمل

۱۳۲

II- خطوط مثلثاتی

روابط بین خطوط مثلثاتی

۱۳۳

یک قوس

روابط بین خطوط مثلثاتی

قوسهایی که تفاضل یا مجموعشان

۱۳۴

مضرب بی از π باشند

روابط بین قوسهای مقابل به

۱۳۵

یک خط مثلثاتی

جدول خطوط مثلثاتی برخی

۱۳۶

قوسهای مهم

دوره تناوب خطوط مثلثاتی

۱۳۶

تقسیم قوسها

۱۳۶

تصویر بر محور

خطوط مثلثاتی مجموع یا

تفاضل دو قوس

۱۳۷

خطوط مثلثاتی مجموع سه

۱۳۷

قوس

خطوط مثلثاتی قوسهایی که

۱۳۷

مضرب یک قوس هستند

خطوط مثلثاتی یک قوس

۱۳۸

بر حسب ظل نصف آن

خطوط مثلثاتی یک قوس

۱۳۸

بر حسب جیب دو برابر آن

محاسبه tga بر حسب $tg2a$

۱۳۹

IV- الگاریتمی کردن

تبدیل مجموع یا تفاضل دو

۱۴۰

خط مثلثاتی بحاصل ضرب

تبدیل حاصل ضرب دو خط مثلثاتی

۱۴۰

بمجموع یا تفاضل

تبدیل برخی عبارات مثلثاتی

۱۴۱

بحاصل ضرب

حل معادله درجه دوم

۱۴۲

بطریق مثلثاتی

V- روابط بین اجزاء

۱۴۲

مثلث

۱۴۲

مثلث قائم الزاویه

۱۴۳

مثلث غیر مشخص

موضوع	صفحه	موضوع	صفحه
روابط بین اجزاء اصلی و		فرعی مثلث	۱۴۳
مساحت مثلث	۱۴۴	ارتفاعات «	۱۴۴
مصنف الزاویه ها	۱۴۵	میانها	۱۴۵
روابط بین اجزاء مختلف	۱۴۶	vi- معادلات مثلثاتی	۱۴۶
معادلات يك مجهولی	۱۴۷	قاعده بیوش	۱۴۷
حل معادلات کلاسیک	۱۴۸	vii- نامعادلات مثلثاتی	۱۵۰
معادلات چند مجهولی	۱۵۱	viii- حل مثلث	۱۵۴
تعادل دستگاهها	۱۵۵	حل مثلث قائم الزاویه	۱۵۶
حل مثلث غیر مشخص	۱۵۷	ix- چهاربرهای گوز	۱۵۸
روابط بین اجزاء چهاربر		مخاطی	۱۵۹
x- استعمال مثلثات در نقشه		بررداری	۱۶۰
مسئله نقشه	۱۶۲		
هندسه			
I - تعاریف	۱۶۴		
II - زوایا و خطوط عمود			
برهم	۱۶۵		
اندازه زاویه	۱۶۶		
افسام زوایا	۱۶۶		
حالات برابری زوایا	۱۶۸		
III - چند برها	۱۶۸		
قضایای مربوطه به چند برها	۱۶۸		
IV - مثلث	۱۶۹		
قضایای مربوط به مثلث	۱۷۰		
حالات برابری مثلثها	۱۷۱		
تناسب و تشابه در مثلث	۱۷۲		
قضیه طالس	۱۷۲		
قضایای مربوط به تشابه مثلث	۱۷۲		
خواص منصف الزاویه	۱۷۳		
قضیه استوارت	۱۷۵		
روابط بین اجزاء			
مختلف مثلث	۱۷۵		
دایره های محیطی و محاطی	۱۷۷		
موربات	۱۷۹		
قضیه منلائوس	۱۷۹		
قضیه سوا	۱۷۹		
V - چهاربر	۱۷۹		

صفحه	موضوع	صفحه	موضوع
۱۹۰	محور اصلی	۱۸۰	متوازی الاضلاع
۱۹۱	حل و بحث معادله درجه دوم	۱۸۱	لوزی
۱۹۱	دوایر عمود بر هم	۱۸۱	مستطیل و مربع
۱۹۲	محیط و مساحت دایره	۱۸۱	ذوزنقه
۱۹۲	محاسبه π	۱۸۲	چهار بر محیطی و محاطی
۱۹۳	مساحت دایره و قطعه و قطاع	۱۸۲	قضیه بطلمیوس
۱۹۳	VIII - بردارها	۱۸۳	چهار بر کامل
۱۹۴	قضیه شال	۱۸۳	قضیه گوس
	مجموع و تفاضل هندسی چند	۱۸۳	قضیه پاپوس
۱۹۴	بردار	۱۸۳	VI - چند برهای منتظم
۱۹۵	تصاویر بردارها		طول ضلع و ارتفاع چند
۱۹۵	IX - موربات	۱۸۴	چند بر منتظم
۱۹۵	قضیه پاسکال	۱۸۵	مساحت چند بر منتظم
۱۷۹	قضایای منلائوس و سوا	۱۸۵	مساحت چند بر نامنتظم
۱۹۶	X - تقسیم توافقی	۱۸۶	VII - دایره
۱۹۷	اشعه توافقی	۱۸۶	اوضاع نسبی دو دایره
۱۹۷	XI - تقارن	۱۸۶	اندازه زاویه
۱۹۷	تقارن مرکزی	۱۸۷	قوس و وتر
۱۹۸	تقارن محوری	۱۸۸	رسم مماس بر دایره
۱۹۹	XII - تشابه		جدول تعداد مماسهای مشترک
۱۹۹	XIII - تجانس	۱۸۸	دو دایره
۲۰۰	قضیه دالامیر		قاعده رسم مماس مشترک
۲۰۱	XIV - تغییر مکان در سطح	۱۸۹	داخلی و خارجی
۲۰۱	انتقال	۱۸۹	قوت نقطه نسبت بدایره

صفحه	موضوع
	XXII - استوانه و مخروط
۲۱۹	و کره
۲۱۹	سطح دوار
۲۱۹	سطح استوانی
۲۲۰	سطح کروی
۲۲۱	استوانه و مخروط
۲۲۲	کره
۲۲۳	تعیین شعاع کره
۲۲۵	xxIII - سه بر کروی
۲۲۵	سه بر قطبی
	XXIV - قوت نقطه نسبت
۲۲۷	بکره
	xxv - قطب و قطبی در
۲۲۸	صفحه
۲۲۸	اشکال قطبی معکوس
۲۲۹	قطب و قطبی در فضا
۲۲۹	xxvi - انعکاس در صفحه
۲۳۱	انعکاس در فضا
۲۳۲	xxvII - مناظر و مرایا
۲۳۲	تصویر مرکزی
۲۳۴	xxvIII - مارپیچ
۲۳۵	مماس بر مارپیچ
۲۳۶	معادله مارپیچ

صفحه	موضوع
۲۰۲	دوران
۲۰۲	XV - خط و صفحه
۲۰۴	وضع دو خط
۲۰۴	وضع دو صفحه
۲۰۵	وضع سه صفحه
۲۰۶	قضیه سه عمود
۲۰۷	رسم عمود مشترک
۲۰۷	xVI - فرجه ها
۲۰۸	تصویر بر صفحه
۲۰۹	خط بزرگترین شیب
۲۰۹	xvII - تقارن در فضا
۲۱۱	xvIII - تجانس در فضا
۲۱۳	xIX - تشابه در فضا
۲۱۳	XX - تغییر مکان در فضا
۲۱۴	انتقال
۲۱۴	دوران
۲۱۵	حرکت مارپیچی
۲۱۵	xxI - چندروها
۲۱۶	قضیه اولر
۲۱۶	اجسام افلاطونی
۲۱۶	منشور و هرم
۲۱۷	مکعب و مکعب مستطیل
۲۱۹	شبه منشور

مخروطات

۲۳۶	۱- بیضی
۲۳۷	رسم بیضی
۲۳۸	فصل مشترك خط و بیضی
۲۳۹	مماس بر بیضی
۲۴۱	شعاعهای حامل - معادله بیضی
۲۴۱	بیضی تصویر دایره است
۲۴۱	مساحت بیضی
۲۴۲	II - هندلولی
۲۴۳	رسم هندلولی
	فصل مشترك خط و
۲۴۴	هندلولی
۲۴۴	مماس بر هندلولی
۲۴۴	رسم مماس بر هندلولی
۲۴۵	مجانبههای هندلولی
	شعاعهای حامل - معادله
۲۴۵	هندلولی
۲۴۶	III - سهمی (شلیجی)
۲۴۶	رسم سهمی
۲۴۸	فصل مشترك خط و سهمی
۲۴۸	مماس بر سهمی
۲۴۹	رسم مماس بر سهمی
	شعاع حامل - معادله و

۲۵۰	مساحت سهمی
	۱۷- خواص مشترك بیضی
۲۵۱	و هندلولی و سهمی
۲۵۲	رسم مماس
۲۵۳	مقاطع مخروطی
	هندسه رومی و ترمیمی
۲۵۴	کلیات
۲۵۵	۱- اصول هندسه رومی
۲۵۵	۱- نقطه
۲۵۵	مقیاس
۲۵۶	II- خط مستقیم
۲۵۶	شیب و اساس
۲۵۷	تسطیح سطح قائم بر افق
۲۵۷	تعیین رقوم نقطه ای از خط
	تعیین زاویه خط با سطح
۲۵۸	مقایسه
۲۵۸	وضع دو خط
۲۵۹	III- صفحه
۲۵۹	خط بزرگترین شیب
۲۶۰	توازی خط و صفحه
۲۶۰	توازی دو صفحه
۲۶۰	تقاطع صفحات
۲۶۰	تقاطع خط و صفحه
۲۶۰	خط عمود بر صفحه

صفحه	موضوع
۲۷۷	زاویه دو خط
۲۷۷	زاویه خط و صفحه
۲۷۷	زاویه دو صفحه
	رسم خطی که با افق زاویه α
۲۷۷	تشکیل دهد
	رسم خطی در صفحه که با افق
۲۷۸	زاویه α تشکیل دهد
۲۷۹	زاویه صفحه با صفحات تصویر
۲۸۹	زاویه خط با صفحات تصویر
۲۷۹	نمایش چند روها
۲۸۰	خطوط مرئی و مخفی
۲۸۱	مقطع اجسام
۲۸۱	فصل مشترك خط و چند رو
۲۸۲	سایه ها

مکانیک

۲۸۴	I بردارها و عزم
۲۸۴	عزم مرکزی
۲۸۶	عزم محوری
۲۸۷	عزم بردار نسبت بصفحه
	علام الحركات
۲۸۸	I - تعاریف
	II - حرکت مستقیم الخط
۲۸۹	متشابه

صفحه	موضوع
۲۶۱	تسطیح
۲۶۳	۲- اصول هندسه ترسیمی
۲۶۳	I - نقطه
۲۶۴	II - خط مستقیم
۲۶۴	خطوط مهم
۲۶۵	نقاط مهم
۲۶۵	توازی دو خط
۲۶۵	تقاطع دو خط
۲۶۵	III - صفحه
۲۶۵	خطوط مهم صفحه
۲۶۶	صفحات مهم
۲۶۷	توازی خط و صفحه
۲۶۷	خط عمود بر صفحه
۲۶۷	فصل مشترك دو صفحه
۲۶۷	فصل مشترك خط و صفحه
۲۶۸	IV - تغییر مکان
۲۶۸	۱ - تغییر صفحه
۲۷۰	ب - دوران
۲۷۲	پ - تسطیح
۲۷۵	۳ - موارد استعمال
۲۷۵	عمود مشترك دو خط
۲۷۵	فاصله دو نقطه
۲۷۶	فاصله نقطه از صفحه
۲۷۶	فاصله نقطه از خط

موضوع

صفحه

۱۱۱-	حرکت مستقیم الخط	۲۸۹
متغیر		
۱۷-	حرکت متشابه التغیر	۲۹۰
۷-	حرکت نوسانی ساده	۲۹۱
۷۱-	حرکت منحنی الخط متشابه	۲۹۱
هد	گراف	۲۹۲
۷۱۱-	حرکت مستدیر متغیر	۲۹۲
۷۱۱۱-	حرکت مستدیر متشابه	۲۹۳
۱۷-	تغییر دستگاه مقایسه	۲۹۳
۷-	حرکت انتقالی	۲۹۴
۷۱-	دوران	۲۹۴
علم القوی		
۷۱۱-	تعاریف	۲۹۵
۷۱۱۱-	تعادل نقطه مادی	۲۹۷
۷۱۷-	استاتیک نقطه آزاد	۲۹۷
۲۹۸	رابطه استون	
۷۱۷۱-	استاتیک نقطه غیر آزاد	۲۹۸
۲۹۹	فشار و عکس العمل	
۲۹۹	اصطکاک	
۳۰۰	قوانین اصطکاک	
۳۰۰	دینامیک نقطه	
۳۰۰	دستورهای اصلی دینامیک	
۷۱۱-	حرکت نقطه مادی	
۳۰۱	آزاد	

موضوع

صفحه

۳۰۱	حرکت در امتداد قائم
۳۰۲	حرکت سهمی شکل
۷۱۱-	حرکت نقطه مادی
۳۰۳	غیر آزاد
	حرکت نقطه بر سطح
۳۰۴	مورب
۳۰۶	۷۱۱- کار
۳۰۶	۷۱۱- قوه حیه
۳۰۷	۷۱۱- استاتیک اجسام صلب
۳۰۸	۷۱۱- اعمال مقدماتی
۳۰۹	۷۱۱۱- مرکز ثقل
۳۱۰	مختصات مرکز ثقل
۳۱۱	مرکز ثقل خطوط و
۳۱۳	سطوح و اجسام مختلف تا
۳۱۳	قضیه گولدن
۷۱۷-	شرط تعادل اجسام صلب
۳۱۳	آزاد
۷۱۷-	شرط تعادل جسم صلب غیر
۳۱۴	آزاد
۳۱۵	کثیر الاضلاع اتکاء
۳۱۵	۷۱۷- ماشینهای ساده
۳۱۵	اهرمها
۳۱۶	چرخ چاه
۳۱۷	کریک یا جک

صفحه	موضوع	صفحه	موضوع
۳۳۸	معادله زمان	۳۱۸	قرقره
۳۳۹	تقویم مصری		آحاد علمی مستعمل در
۳۳۹	تقویم قیصری	۳۱۹	ریاضیات
۳۴۰	تقویم گرگوارى		هیئت
۳۴۰	تقویم جلالی	۳۲۰	I- کلیات
۳۴۱	تقویم قمری	۳۲۳	II- مختصات کروی
۳۴۱	vll- ماه	۳۲۳	مختصات سمتیه
۳۴۳	vlll- خسوف و کسوف	۳۲۴	ارتفاع قطب
۳۴۳	خسوف	۳۲۴	مختصات معدلی
۳۴۵	کسوف	۳۲۴	تعیین فاصله قطبی
۳۴۶	IX- قوانین هیئت	۳۲۵	مختصات منطقی
۳۴۶	قوانین کیلر	۳۲۵	III- زمین
۳۴۶	قانون نیوتن	۳۲۸	IV- نقشه‌های جغرافی
۳۴۷	X- سیارات	۳۳۴	V- خورشید
۳۴۷	قانون بد	۳۳۵	تعیین نقاط اعتدال
۳۴۸	جدول مشخصات سیارات عمده	۳۳۶	VI- زمان و تقویم
۳۴۹	« ابعاد و جرم » « »	۳۳۸	فصول

مقدمه

رشته‌های مختلف علوم، خاصه علوم ریاضی، چنان
بیکدیگر بستگی دارند که در موارد بسیار فهم و درك مطلبی
در يك رشته بمرآجه مطالب متنوع در رشته‌های دیگر
محتاج میباشد.

از این روی طالب علم باید کتابهای متعدد در دسترس
خود داشته باشند و گاه و بیگاه بآنها مرآجه کند.
این کار برای کسانی که با تفنن و فراغ خاطر بمطالعه
میپردازند دشوار نیست، اما برای جوانانیکه در دوره‌های
متوسطه و عالی بکسب دانش مشغولند جای آن نیست که
مقدار زیادی از وقت گرانبهایشان که باید برای فرا گرفتن
مواد درسی مصروف شود به تجسس در کتاب‌های مختلف
صرف گردد.

ما، برای اینکه خدمت و کمکی بدانش آموزان و

دانشجویان جوان کرده باشیم، آنچه در رشته های مختلف ریاضیات مقدماتی باید آموخت یکجا گرد آورده و در يك مجلد در دسترس آنان قرار میدهیم.

در این مجموعه نظری ببر نامه کنونی تحصیلات متوسطه نداشته و مطالب کتاب را بر طبق آن مرتب نکرده ایم، بلکه آنچه در حساب، جبر، هندسه و مخروطات، هندسه های رقومی و ترسیم، مثلثات، مکانیک و هیئت باید آموخته شود بطور مختصر، و شاید مفید، جمع آوری نموده ایم. برای هیچيك از مطالب اقامه دلیل و برهان نکرده ایم چه در این صورت کتاب بسیار مفصل میشد و جا دادن مطالب در يك مجلد میسر نمیگردید.

این کتاب که با قطع كوچك تهیه شده بهترین رفیق شفیق جوان دانشجو است و مطالبی را که وی از کتابهای متعدد آموخته است یاد آوری میکند و او را در اینک هر لحظه بکتابهای مختلف درسی مراجعه کند بی نیاز میسازد. همه جا همراه او، همیشه در دسترس او و در هر لحظه طرف مراجعه او میتواند بود.

ما بسیار کوشیده ایم که کتاب حاضر را کامل و جامع
تهیه و تدوین کرده باشیم ، ولی تردیدی نداریم که نقص های
بسیار دارد و تکمیل آن محتاج براهنمائی و کمک همکاران
عزیز و معلمان دانشمند میباشد .

این کار هر چند بظاهر خرد باشد ، شگرفتر از آنست
که بتوانیم ادعا کنیم که آنرا چنانکه شایسته است انجام
داده ایم چنین داعیه ای نداریم و از دیران فاضل خواستاریم
که ما را بمعایب و نواقص کتاب واقف سازند تا در چاپهای بعد
اثری مفید تر و جامع تر در دسترس اهل طلب قرار داده
شود .

امیدواریم تا چاپهای دیگر کتاب ، چاپخانه های ما
بوسایل چاپ کتب ریاضی مجهزتر شوند تا نواقصی هم که از
حیث حروف و علامات ریاضی ، یا احیاناً کمی کارگرمتخصص
پیدا شده است از میان برود .

بهمن ماه ۱۳۲۶

احمد بیرشک - احمد انواری

حساب

۱- کلیات

- ۱- آنچه که قابل کم و زیاد شدن باشد کمیت است .
- ۲- قسمت محدودی از کمیت را مقدار گویند :
- ۳- واحد یا یک هر کمیت مقدار مشخص و معینی از آن کمیت است که برای سنجیدن مقادیر همجنس خود بکار میرود .
- ۴- عدد نتیجه سنجیدن هر مقدار با واحد همجنس خودش میباشد .
- ۵- عدد درست (صحیح) عبارتست از اجتماع چند واحد تمام .
- ۶- سلسله اعداد طبیعی رشته اعدادیست که از يك شروع شود و در آن هر عدد يك واحد از عدد بلا فاصله قبل از آن بزرگتر باشد . این سلسله بی انتهاست .
- ۷- پایه یا مبنای شمار معین میکند که هر واحد مرتبه بالاتر چند برابر واحد مرتبه پائین تر است .
- ۸- پایه شمار معمولی ده میباشد و این شمار را شمار دهدهی (اعشاری) میگویند .
- ۹- در اعداد دهدهی (اعشاری) ده واحد از هر مرتبه واحد مرتبه بلافاصله بالاتر را تشکیل میدهد .
- ۱۰- در هر عدد رقمی که سمت چپ رقم دیگر نوشته شود نمایش مرتبه بلافاصله بالاتر خواهد بود .

II - جمع

۱۱ - در جمع اعداد تغییر محل عوامل جمع تغییری در حاصل جمع نمیدهد.

۱۲ - بجای چند عامل جمع میتوان حاصل جمع آنها را قرار داد، یعنی :

$$N = a + b + c + d + e = (a + b) + (c + d) + e$$

۱۳ - برای امتحان جمع یکی از این طریقه ها عمل باید کرد :

الف - اگر در موقع جمع اعداد را از پائین بیلا جمع کرده باشیم برای امتحان آنها را از بالا پائین جمع میکنیم.

ب - اعداد را دسته دسته نموده هر دسته را جدا گانه جمع میکنیم و حاصل جمعها را با هم جمع مینمائیم .

III - تفریق

۱۴ - هر گاه یک عدد بعوامل تفریق (مفروق و مفروق منه یا کاسته و کاهشیاب) اضافه یا از آنها کم کنیم در تفاضل تغییری پیدا نمیشود . یعنی :

$$a - b = (a \pm c) - (b \pm c)$$

۵ - برای کاستن مجموع چند عدد از يك عدد (یا مجموع چند عدد) میتوان يكايك آنها را از این عدد (یا مجموع چند عدد) کاست ، یعنی :

$$(a + b + c) - (d + e + f) = a + b + c - d - e - f$$

۱۶ - امتحان تفریق را میتوان یکی از طریقه های

زیر انجام داد :

الف - تفاضل را از کاهشیاب کسر می‌کنیم، کاسته بدست

می‌آید .

ب - تفاضل را با کاسته جمع می‌کنیم، کاهشیاب بدست

می‌آید .

IV - ضرب

۱۷- در ضرب دویا چند عدد تغییر محل عاملهای ضرب

در حاصل ضرب اثری ندارد ، یعنی : $a \times b \times c = b \times a \times c$

۱۸- برای ضرب مجموع یا تفاضل چند عدد در يك عدد

آن عدد را در هر يك از عوامل جمع یا تفریق ضرب نموده

حاصل ضربهای جزء را با هم جمع یا از هم تفریق می‌کنیم، یعنی :

$$(a + b + c) m = am + bm + cm$$

۱۹- بجای چند عامل میتوان حاصل ضرب آنها را

قرار داد، یعنی : $abcdefg = (fbg) \times (da) \times (ec)$

۲۰- برای ضرب يك عدد در حاصل ضرب چند عدد

میتوان آنرا در یکی از عوامل ضرب نموده حاصل را در سایر

عوامل ضرب کرد ، یعنی : $abcdef \times n = abc(dn)ef$

۲۱- برای ضرب حاصل ضرب چند عدد در حاصل

ضرب چند عدد دیگر میتوان تمام عوامل را در هم ضرب نمود،

یعنی : $abcd \times pq = abcdpq$

۲۲- در ضرب دو عدد هر گاه یکی از دو عامل ضرب

را چند مرتبه بزرگ یا کوچک کنیم حاصل ضرب نیز همان اندازه بزرگ یا کوچک میشود.

۲۳ - هر گاه یکی از عاملهای ضرب را در عددی ضرب و عامل دیگر را بر همان عدد تقسیم کنیم در حاصل ضرب تغییری حاصل نمیشود.

۲۴ - برای امتحان ضرب جای مضروب (بس شمرده) و مضروب فیه (بس شمار) را باهم عوض میکنیم و عمل ضرب را تکرار مینمائیم.

۷- تقسیم

۲۵ - در هر تقسیم اگر حاصل ضرب بهر (خارج قسمت) در بخشیا ب (مقسوم علیه) را با باقیمانده جمع کنیم بخشی (مقسوم) بدست میآید. یعنی اگر D بخشی و d بخشیا ب و q بهر و r باقیمانده باشد:

$$D = dq + r$$

و همچنین $dq < D < d(q+1)$

۲۶ - اگر مقسوم و مقسوم علیه (بخشی و بخشیا ب) را بر عددی تقسیم (یا در عددی ضرب) کنیم خارج قسمت تغییری نمیکند ولی باقیمانده بر آن عدد تقسیم (یا در آن عدد ضرب) میشود.

۲۷ - برای تقسیم يك عدد بر حاصل ضرب چند عدد میتوان آنرا بر یکی از عوامل ضرب تقسیم نموده خارج- قسمت را بر عامل دوم و خارج قسمت جدید را بر عامل سوم تقسیم کنیم و عمل را ادامه دهیم تا آخرین خارج قسمت

بدست آید .
 ۲۸ - برای امتحان تقسیم میتوان خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب نموده حاصل را با باقیمانده جمع کرد ، در صورت صحت مقسوم بدست میآید . یا باقیمانده را از مقسوم کم نمود، در صورت صحت تفاضل بر مقسوم علیه قابل قسمت می باشد .

VI- قوای اعداد (توان)

۲۹ - قوه m ام هر عدد عبارتست از حاصل ضرب m مرتبه

$$a^m = \overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^{m \text{ مرتبه آن عدد}}$$

a را پایه و m را نما گویند.

۳۰ - قوه اول هر عدد مساوی خود آن عدد است

$$a^1 = a$$

یعنی :

۳۱ - هر عدد بقوه صفر مساوی است با يك، یعنی :

$$a^0 = 1$$

۳۲ - حاصل ضرب دو قوه با پایه مشترك مساویست با

همان پایه بقوه مجموع نماها، یعنی

$$a^m \times a^n = a^{(m+n)}$$

۳۳ - حاصل ضرب دو قوه با نماهای مشترك مساویست

با حاصل ضرب پایهها بقوه همان نمای مشترك. یعنی :

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

۳۴- توان m ام حاصل ضرب چند عدد مساویست با حاصل-

ضرب توانهای m ام آن اعداد. یعنی :

$$(abc)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m$$

۳۵- اگر توان m ام عددی را بخواهیم به توان

جدیدی برسانیم باید پایه را به توان حاصل ضرب نماها

رساند یعنی :

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

۳۶- خارج قسمت دو قوه مختلف يك عدد مساویست

با همان پایه که به توان تفاضل دو نما برسد، یعنی :

$$a^m : a^n = a^{(m-n)}$$

۳۷- باقیمانده تقسیم قوه m ام هر عدد D بر عدد

دیگر d مساویست با باقیمانده قوه m ام باقیمانده تقسیم

$$\frac{D}{d} \text{ بر } d$$

VII - مساوی و نامساوی

۳۸- اگر دو طرف دو یا چند تساوی را با یکدیگر جمع

یا از یکدیگر تفریق، در یکدیگر ضرب یا بر یکدیگر تقسیم

کنیم نتیجه يك تساوی خواهد بود :

$$a = b$$

$$c = d$$

$$a + c = b + d$$

$$a - c = b - d$$

$$a \cdot c = b \cdot d$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

۳۹ - اگر بین دو طرف دو یا چند نامساوی یکجهت

اعمال جمع ، تفریق ، ضرب یا تقسیم بجا آوریم نتیجه همواره يك نامساوی در همان جهت خواهد بود :

$$a > b$$

$$c > d$$

$$a \pm c > b \pm d$$

$$a.c > b.d$$

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$$

تبصره - در صورتیکه اعمال چهارگانه بین چند مساوی

و چند نامساوی یکجهت بعمل آید نتیجه يك نامساوی در همان جهت خواهد بود .

VIII - بخش پذیری یا قابلیت تقسیم

۴۰ - عددی بر عدد دیگر قابل قسمت است که باقیمانده

تقسیمش بر آن صفر باشد. عدد اول را **مضرب** دومی و دومی را **مقسوم علیه** یا **عاد** اولی مینامند و میگویند دومی اولی را عاد میکند .

۴۱ - هر عدد که رقم سمت راست آن صفر یا جفت باشد

بر ۲ قابل قسمت است .

۴۲ - هر عدد که دو رقم سمت راست آن صفر باشند

یا عددی تشکیل دهند که مضرب ۴ باشد بر ۴ قابل قسمت است .

۴۳ - عددی بر ۸ قابل قسمت است که سه رقم سمت

واست آن صفر بوده یا عددی تشکیل دهند که مضرب ۸ باشد .

۴۴ - عددی بر ۳ قابل قسمت است که مجموع ارقامش

بر ۳ قابل قسمت باشد . اگر تقسیم مجموع ارقام يك عدد بر

۳ باقیمانده داشته باشد باقیمانده تقسیم آن عدد هم بر ۳ همان خواهد بود.

۴۵ - عددی بر ۵ قابل قسمت است که رقم سمت راست آن صفر یا ۵ باشد.

۴۶ - عددی بر ۶ قابل قسمت است که بر ۲ و ۳ قابل-قسمت باشد.

۴۷ - عددی بر ۹ قابل قسمت است که مجموع ارقامش بر ۹ قابل قسمت باشد. اگر تقسیم مجموع ارقام عددی بر ۹ باقیمانده داشته باشد باقیمانده تقسیم عدد هم بر ۹ همان خواهد بود.

۴۸ - عددی بر ۱۱ قابل قسمت است که تفاضل مجموع ارقام مراتب زوج و مجموع ارقام مراتب فردش صفر و یا قابل قسمت بر ۱۱ باشد. و الا باقیمانده تقسیم همان تفاضل یا زیادتى ۱۱ بر آن تفاضل خواهد بود.

مثال (۱) : 798842 بر ۱۱ قابل قسمت است.

(۲) 4758 بر ۱۱ قابل قسمت نیست و باقیمانده تقسیم و تفاضل ارقام مراتب زوج و فرد ۶ میباشد.

(۳) عدد 3547580 بر ۱۱ قابل قسمت نیست و تفاضل مجموع ارقام مراتب زوج و فرد ۳ و باقیمانده تقسیم ۸ یا (۳-۱۱) است

IX - اعداد اول

۴۹ - هر عددی که جز بر خود و يك به عدد دیگری قابل قسمت نباشد عدد اول نامیده میشود.

۵۰ - اعداد اول از ۱ تا ۱۰۰۰ عبارتند از :

۱	۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	۲۳	۲۹	۳۱	۳۷	۴۱
۴۳	۴۷	۵۳	۵۹	۶۱	۶۷	۷۱	۷۳	۷۹	۸۳	۸۹	۹۷		
۱۰۱	۱۰۳	۱۰۷	۱۰۹	۱۱۳	۱۲۷	۱۳۱	۱۳۷	۱۳۹					
۱۴۹	۱۵۱	۱۵۷	۱۶۳	۱۶۷	۱۷۳	۱۷۹	۱۸۱	۱۹۱					
۱۹۳	۱۹۷	۱۹۹	۲۱۱	۲۲۳	۲۲۷	۲۲۹	۲۳۲	۲۳۹					
۲۴۱	۲۵۱	۲۵۷	۲۶۳	۲۶۹	۲۷۱	۲۷۷	۲۸۱	۲۸۳					
۲۹۳	۳۰۷	۳۱۱	۳۱۳	۳۱۷	۳۳۱	۳۳۷	۳۴۷	۳۴۹					
۳۵۳	۳۵۹	۳۶۷	۳۷۳	۳۷۹	۳۸۳	۳۸۹	۳۹۷	۴۰۱					
۴۰۹	۴۱۹	۴۲۱	۴۳۱	۴۳۳	۴۳۹	۴۴۳	۴۴۹	۴۵۷					
۴۶۱	۴۶۳	۴۶۷	۴۷۹	۴۸۷	۴۹۱	۴۹۹	۵۰۳	۵۰۹					
۵۲۱	۵۲۳	۵۴۱	۵۴۷	۵۵۷	۵۶۳	۵۶۹	۵۷۱	۵۷۷					
۵۸۷	۵۹۳	۵۹۹	۶۰۱	۶۰۷	۶۱۳	۶۱۷	۶۱۹	۶۳۱					
۶۴۱	۶۴۳	۶۴۷	۶۵۳	۶۵۹	۶۶۱	۶۷۳	۶۷۷	۶۸۳					
۶۹۱	۷۰۱	۷۰۹	۷۱۹	۷۲۷	۷۳۳	۷۳۹	۷۴۳	۷۵۱					
۷۵۷	۷۶۱	۷۶۹	۷۷۳	۷۸۷	۷۹۷	۸۰۹	۸۱۱	۸۲۱					
۸۲۳	۸۲۷	۸۲۹	۸۳۹	۸۵۳	۸۵۷	۸۵۹	۸۶۳	۸۷۷					
۸۸۱	۸۸۳	۸۸۷	۹۰۷	۹۱۱	۹۱۹	۹۲۹	۹۳۷	۹۴۱					
۹۴۷	۹۵۳	۹۶۷	۹۷۱	۹۷۷	۹۸۳	۹۹۱	۹۹۷	.					

جدول اعداد اول معروفست بغربال اراتستن

۵۱ - تجزیه يك عدد بعوامل اول تشكيل دهنده آن عدد فقط بیک طریق ممکن است.

۵۲ - دو عدد را نسبت بهم اول گویند وقتی عادمشترك نداشته باشند، یعنی عددی نتوان یافت که هر دو بر آن قابل-قسمت باشند.

۵۳ - هر دو عدد غیر اول اقلا يك عاد اول خواهند داشت .

۵۴ - رشته اعداد اول بی پایان است .

۵۵ - هر عدد اولی که عدد دیگر را عاد نکند نسبت

بآن اول است .

۵۶ - هر عدد غیر اول حاصلضرب چند عدد اول است .

بدست آوردن عوامل اول هر عدد غیر اول را تجزیه آن

بعوامل اول گویند .

X - بزرگترین عاد (یا مقسوم علیه) مشترك

علامت اختصاری آن بعم می باشد .

۵۷ - دو یا چند عدد میتوانند عاد های مشترك بسیار

داشته باشند ؛ آنرا که از همه بزرگتر باشد بعم آنها میگویند .

۵۸ - اگر بین دو عدد ، عدد کوچکتر بزرگتر را عاد کند

خود آن بعم دو عدد مفروض خواهد بود .

۵۹ - بعم دو عدد بعم عدد کوچکتر و باقیمانده تقسیم

عدد بزرگتر بر کوچکتر نیز می باشد .

۶۰ - برای تعیین بعم دو عدد عدد بزرگتر را بر کوچکتر

تقسیم میکنیم و عدد کوچکتر را بر باقیمانده تقسیم اول و

باقیمانده تقسیم اول را بر باقیمانده تقسیم دوم قسمت میکنیم و

عمل را به همین وضع ادامه میدهیم تا وقتی که عمل تقسیم باقیمانده

نداشته باشد . آخرین مقسوم علیه بعم دو عدد مفروض است .

	۵	۷	۸
۱۷۵۸	۳۴۲	۴۸	۶
۴۸	۶		

۶۱ - برای تعیین بعم چند عدد نخست بین دوتای آنها

بعم معین میکنیم ، سپس بین این بعم و عدد سوم بعم بدست میآوریم ، آنگاه بین بعم جدید و عدد چهارم . . . و به همین نحو عمل را ادامه میدهیم تا همه اعداد منظور شوند . آخرین بعم بعم کلیه اعداد است .

۶۲ - ممکنست بعم چند عدد را از راه تجزیه آنها

بعوامل اول بدست آورد . برای اینکار پس از تجزیه آن اعداد عوامل اول مشترك آنها با کوچکترین نما را در هم ضرب میکنیم .

$$۱۷۵۸ = ۲ \times ۳ \times ۲۹۳$$

$$۳۴۲ = ۲ \times ۳^۴ \times ۱۹$$

$$\text{بعمم آنها} = ۲ \times ۳$$

۶۳ - اگر دو عدد در عددی ضرب (یا بر عددی تقسیم)

شوند بعم آنها نیز چنین خواهد شد .

XI - کوچکترین مضرب مشترك

علامت اختصاری آن کمم

۶۴- دو یا چند عدد مضربهای مشترك بيشمار دارند. آنرا که از همه کوچکتر باشد کم آنها میگویند.

۶۵- کم چند عدد که نسبت بهم اول باشند حاصلضرب آنهاست.

۶۶- اگر دو عدد در عددی ضرب (یا بر عددی تقسیم) شوند کم آنها نیز چنین خواهد شد.

۶۷- کم بین دو عدد عبارتست از خارج قسمت تقسیم حاصل ضرب آن دو عدد بر بعم آنها.

۶۸- کم بین چند عدد باینطریق بدست میآید که اول بین دوتای آنها کم تعیین نموده و بعد بین این کم و عدد سوم کم تعیین میکنیم و بهمین طریق عمل را ادامه میدهیم تا کم بین تمام آن اعداد بدست آید.

۶۹- کوچکترین مضرب مشترك اعدادی که بعوامل اول تجزیه شده اند عبارتست از حاصل ضرب عوامل اول مشترك و غیر مشترك آنها که دارای بزرگترین نما باشند.

XII- برخه یا کسر

۷۰- هر گاه یک (واحد) را به n قسمت مساوی کنیم و m قسمت از آنرا اختیار نمائیم گوئیم برخه‌ای یا کسری از واحد مساوی $\frac{m}{n}$ آن را اختیار کرده ایم.

n را برخه نام یا مخرج و m را برخه شمار یا صووت گویند.

هر گاه n قوه‌ای از ۱۰ باشد برخه را ده‌دهی یا

اعشاری و گرنه آنرا **متعارفی** میگویند.

اگر m از n بزرگتر باشد $\frac{m}{n}$ را **برخه** نامینامند.

چنانچه با برخه عدد صحیحی همراه باشد يك عدد برخگی خواهیم داشت، مانند $2\frac{3}{5}$

m و n ممکنست عدد صحیح یا کسر باشند.

۷۱ - **نسبت دو طول** - هرگاه برای اندازه گرفتن

دو طول l و l' واحد مشترکی بکار رود و l شامل m مرتبه و l' شامل n مرتبه واحد مشترك باشد نسبت دو طول l و l'

عبارتست از برخه $\frac{m}{n}$.

خواص عمومی

۷۲ - حاصل ضرب طولی مانند l در عدد n عبارتست

از حاصل جمع n طول مساوی l .

۷۳ - حاصل ضرب طولی مانند l در $\frac{1}{n}$ یعنی عکس n

عبارتست از طول حاصل از تقسیم l به n قسمت مساوی.

۷۴ - حاصل ضرب طولی مانند l در کسر $\frac{m}{n}$ عبارتست

از $\frac{m}{n}$ طول l ، یعنی برای بدست آوردن این حاصل ضرب باید

l را در m ضرب و حاصل را بر n تقسیم نمود یا l را بر n تقسیم و خارج قسمت را در m ضرب کرد.

۷۵ - هرگاه دو جمله کسری (صورت و مخرج) را در

يك عدد (یا بر يك عدد) ضرب (یا تقسیم) کنیم حاصل کسری است مساوی کسر مفروض .

۷۶ - هرگاه صورت کسری را در عددی ضرب نمائیم

کسر در آن عدد ضرب میشود .

۷۷ - هرگاه مخرج کسری را در عددی ضرب نمائیم

کسر بر آن عدد تقسیم میشود .

۷۸ - هرگاه صورت کسری را بر عددی تقسیم نمائیم

کسر بر آن عدد تقسیم میشود .

۷۹ - هرگاه مخرج کسری را بر عددی تقسیم نمائیم

کسر در آن عدد ضرب میشود .

۸۰ - برای اینکه دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ برابر باشند

لازم و کافیست که $a d = b c$ باشد .

۸۱ - کسری را میگویند **بسیاده ترین صورت** در آمده

یا **غیر ممکن التحویل** شده است که صورت و مخرجش عاد

مشترک نداشته باشند یعنی نسبت بهم اول باشند .

۸۲ - چند کسر را میگویند **مخرج مشترك** دارند که

مخرجهای همه یکی باشد .

۸۳ - برای تحویل چند کسر بکوچکترین مخرج مشترك باید:

۱ - هر کسر را بسیاده ترین صورت در آورد ،

۲ - سپس بین مخرجها کم تعیین کرد ،

۳ . کم را بر مخرج هر کسر تقسیم و خارج قسمت را

در دو عامل کسر ضرب نمود .

تبصره ۵ - هر گاه در قسمت ۲ بجای کم مخرجها يك مضرب مشترك آنها را بدست آوریم کسرها يك مخرج تحويل خواهند شد نه بکوچکترین مخرج مشترك .

جمع و تفریق برخه‌ها

۸۴ - مجموع یا تفاضل چند کسر که يك برخه نام (مخرج) داشته باشند کسریست که صورتش مجموع یا تفاضل صورتها و مخرجش مخرج مشترك کسرهاى مفروض باشند .

تبصره ۵ - اگر کسرها يك مخرج نداشته باشند نخست آنها را يك مخرج تحويل میکنیم .

ضرب برخه‌ها

۸۵ - حاصلضرب دو یا چند کسر کسریست که صورتش حاصلضرب صورتها و مخرجش حاصلضرب مخرجها باشد .

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f}$$

تقسیم کسرها

۸۶ - برای تقسیم دو کسر بر یکدیگر کسر مقسوم علیه را معکوس نموده بین آنها عمل ضرب بجا میآوریم :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

۸۷ - هر عدد صحیح را میتوان کسری دانست که مخرجش ۱ باشد . با این فرض قواعد راجع بسامال اصلی در کسرها را میتوان در اعداد صحیح نیز جاری دانست .

برخه‌های ددهی

۸۸ - مجموع و تفاضل عددهای ددهی ممکنست عدد

صحیح یا ددهی باشد .

۸۹ - حاصلضرب دو عدد ددهی همیشه عددیست ددهی

۹۰ - خارج تقسیم دو عدد ددهی ممکنست عددی

صحیح یا کسر ددهی یا کسر متعارفی باشد .

تبدیل کسر ددهی به متعارفی و بعکس

۹۱ - هر کسر ددهی را میتوان بصورت کسر متعارفی

$$\text{نوشت : } \frac{23}{40} = \frac{575}{1000} = 0.575$$

۹۲ - هر کسر متعارفی را میتوان بوسیله تقسیم کردن

صورت بر مخرج بصورت کسر ددهی درآورد :

$$\frac{23}{25} = 0.92$$

کسر متعارفی را مولد کسر ددهی میگویند

۹۳ - اگر مخرج کسر متعارفی فقط مضرب قوای مختلف

۲ و ۵ باشد تقسیم صورت بر مخرج بطور صحیح انجام

میگیرد یعنی بالاخره باقیمانده تقسیم صفر میشود . اما اگر

مخرج شامل عواملی غیر از ۲ و ۵ باشد باقیمانده تقسیم ،

هر قدر هم عمل را ادامه دهیم ، هیچگاه صفر نمیگردد و

چون بعد از يك يا چند عمل باقیمانده ای برابر یکی از

باقیمانده‌های سابق بدست خواهد آمد يك عده ارقام مرتباً

در خارج قسمت تکرار خواهند شد . چنین برخه‌ای را برخه

دوری یا کسر متناوب گویند .

$$\text{مثال ۱ : } \frac{2}{3} = 0.666 \dots$$

$$\frac{5}{7} = 0.714285 \dots \quad 2$$

در برخه دوری پیکرهائی را که تکرار میشوند دوره گردش نامند در مثال ۱ دوره گردش ۶ و در مثال ۲ ۷۱۴۲۸۵ است.

۹۴ - برخه دوری را ساده گویند اگر دوره گردش بی فاصله بعد از ممیز شروع شود (مثالهای بالا) و مرکب خوانند اگر بین ممیز و دوره گردش يك دوره غیر گردش یعنی عددی باشد که تکرار نشود.

$$\text{مثال } \frac{5}{14} = 0.3571428 \dots$$

۹۵ - برای نوشتن بعد از ممیز دوره غیر گردش و بعد دوره گردش را يك بار نوشته پس از آن چند نقطه میگذاریم
۹۶ - برخه متعارفی وقتی بیرخه دوری ساده قابل تبدیل است که در مخرجش هیچ عامل ۲ و ۵ نباشد و وقتی که در مخرجش عامل ۲ یا ۵ و عوامل دیگر باشند بیرخه دوری مرکب تبدیل میگردد.

۹۷ - کسر مولد کسرا عشری دوره ساده کسری است که صورتش يك دوره گردش و مخرجش بعده دوره گردش ۹ باشد.

۹۸ - صورت کسر مولد کسرا عشری متناوب مرکب بدین طریق بدست میآید که دوره غیر گردش را نوشته و دنبال آن يك دوره گردش را بنویسیم بعد از این عدد که حاصل میشود عدد حاصل از دوره غیر گردش را کم کنیم این

تفاضل صورت کسر مولد است مخرج کسر مولد کسراشاری
متناوب مرکب بدین طریق بدست میآید که بعده دوره گردش
۹ نوشته و بعده دوره غیر گردش صفر در جلوی آن بگذاریم

XIII نسبت و تناسب :

۹۹ - نسبت دو عدد a و b عبارتست از خارج قسمت $\frac{a}{b}$.

اعداد a و b میتوانند صحیح یا کسری باشند.

۱۰۰ - تساوی دو نسبت را يك تناسب گویند مانند

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

تناسب مذکور را میتوان بصور زیر نوشت :

$$a \cdot d = c \cdot b \quad - ۱$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ و } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ و } \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ و } \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \quad - ۲$$

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \quad \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \quad \frac{a}{c} = \frac{d}{b}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} \quad - ۳$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad - ۴$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \dots \quad - ۱۰۱$$

روابط زیر نیز نتیجه میشود :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{\pm a \pm b \pm c \pm d}{\pm a' \pm b' \pm c' \pm d'}$$

۱۰۲- اگر چند نسبت نامساوی $\frac{a}{a'}$ و $\frac{c}{c'}$ و $\frac{d}{d'}$ و $\frac{b}{b'}$ در دست

یاشند نسبت $\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'}$ محصور است بین بزرگترین

و کوچکترین کسور مفروض.

۱۰۳- اگر بصورت و مخرج کسر کوچکتر از واحد

$\frac{a}{b}$ يك عدد c بیفزائیم کسر بزرگتر میشود ولی باز از ۱

کوچکتر است یعنی هرگاه $\frac{a}{b} < 1$ باشد $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$

۱۰۴- ولی هرگاه $\frac{a}{b} > 1$

$$\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$$

۱۰۵- واسطه عددی A بین دو عدد a و b عبارتست از:

$$A = \frac{a+b}{2}$$

همچنین واسطه عددی A بین n عدد a و b و c و ... و 1

$$A = \frac{a+b+c+\dots+1}{n} \quad \text{عبارتست از:}$$

۱۰۶- واسطه هندسی G بین دو عدد a و b عبارتست از:

$$G = \sqrt{a \cdot b}$$

همچنین واسطه هندسی G بین n عدد a و b و c و ... و عبارتست از:

$$G = n\sqrt{a \cdot b \cdot c \dots l}$$

۱۰۷- واسطه عددی A بین n عدد a و b و c و ...

و 1 از واسطه هندسی G آنها بزرگتر است.

XIV - مقیاسها

۱ - دستگاه متری

۱۰۸- در این دستگاه یکه اصلی واحد طول میباشد

و سایر یکها از آن مشتق میشوند.

۱۰۹: طول

واحد: متر = تقریباً $\frac{1}{4000000}$ نصف النهار زمین

= متر نمونه بین المللی

اضعاف: دکامتر = ۱۰ متر، هکتومتر = ۱۰۰ متر

کیلومتر = ۱۰۰۰ متر

اجزاء: دسیمتر = ۰/۱ متر، سانتیمتر = ۰/۰۱ متر

میلیمتر = ۰/۰۰۱ متر

۱۱۰: سطح

واحد: متر مربع

اضعاف: دکامتر مربع = ۱۰۰، هکتومتر مربع = ۱۰۰۰۰

کیلومتر مربع = ۱۰۰۰۰۰ متر مربع

اجزاء : دسیمتر مربع = 0.01 ، سانتیمتر مربع =

0.0001 ، کیلومتر مربع = 0.000001 متر مربع

واحد اراضی زراعتی : آر = دکامتر مربع

اضعاف : هکتار = 100 آر = هکتومتر مربع

اجزاء : سانتی آر = 0.01 آر = متر مربع

تبصره : در مقیاس سطح اضعاف و اجزاء صد بصد

بزرگ و کوچک میشوند .

۱۱۱ = حجم

واحد : متر مکعب

اضعاف : متداول نیستند

اجزاء : دسیمتر مکعب = 0.001 ، سانتیمتر مکعب

= 0.000001 ، میلیمتر مکعب = 0.000001

متر مکعب .

تبصره : در مقیاس حجم اضعاف و اجزاء هزار بهزار

بزرگ و کوچک میشوند .

۱۱۲ = پیمانه

واحد : لیتر = یک دسیمتر مکعب

اضعاف : دکالتر = 10 ، هکتولتر = 100 ، کیلو

لیتر = 1000 لیتر

اجزاء : دسیلیتر = 0.1 ، سانتیلیتر = 0.01 ، میلیلیتر

= 0.001 لیتر

۱۱۳ = وزن :

واحد : گرم = وزن یک سانتیمتر مکعب آب مقطر ۴ درجه حرارت

اضعاف : دکا گرم = ۱۰ ، هکتو گرم = ۱۰۰ ، کیلو گرم = ۱۰۰۰ گرم

کنتال = ۱۰۰ کیلو گرم ، تن = ۱۰۰۰ کیلو گرم

اجزاء : دسی گرم : ۰/۱ سانتیگرم = ۰/۰۱ میلی گرم = ۰/۰۰۱ گرم

برای جواهرات : قیراط = ۲۰ سانتیگرم

بستگی بین وزن و حجم

۱ گرم معادلست با وزن يك سانتیمتر مکعب آب مقطر ۴ درجه

۱ کیلو گرم » » يك دسیمتر » » »

۱ تن » » يك متر » » »

گرم و سانتیمتر مکعب ، کیلو گرم و دسیمتر مکعب ،

تن و متر مکعب را یک‌های متناظر گویند

۱۱۵ = وزن مخصوص يك جسم عبارتست از وزن

یکه حجم در صورتیکه وزن با یکه متناظر آن بیان شود .

وزن مخصوص برخی اجسام مهم :

۱	چوب پنبه	۰/۲۴	۸	آلومینیم	۲/۶
۲	چوب	۰/۶۹-۱/۰۳	۹	آنتیموان	۶/۸
۳	بنزین	۰/۶۹-۰/۷۱	۱۰	روی	۷/۲
۴	نفت	۰/۷۶	۱۱	چدن	۷/۱-۷/۳
۵	الکل	۰/۸۱	۱۲	قلم	۷/۲
۶	یخ	۰/۸۸-۰/۹۲	۱۳	آهن	۷/۸۵
۷	آب	۱/-	۱۴	فولاد نرم	۷/۸۶

۸/۷-۸/۴	۲۵	مفرغ	۱/۱-۰/۹	۱۵	مازوت
۸/۸۵	۲۶	نیکل	۱/۵-۱/۱	۱۶	اسفالت
۸/۹	۲۷	مس	۱/۵-۱/۲	۱۷	ذغال سنک
۱۰/۵	۲۸	نقره	۱/۴	۱۸	کک
۱۱/۳	۲۹	سرب	۱/۶-۱/۴	۱۹	آجر
۱۳/۶	۳۰	جیوه	۲/۱-۱/۶	۲۰	خاک رس
۱۹/۳۲	۳۱	طلا	۱/۸-۱/۴۵	۲۱	بتن
۲۱/۲	۳۲	پلاتین	۱/۹	۲۲	سیمان
			۲/۶-۲/۴	۲۳	شیشه
			۳/۰۸-۲/۵	۲۴	سنک

۱۱۶ - پول :

شماره ترتیب	مشخصات	عبار	وزن بگرم	
			غیر خالص	خالص
	طلا			
۱	یک پهلوی	۱۰۰۰ در ۹۰۰	۸۰۱۳۵۹۸	۷۰۳۲۲۳۸۲
۲	نیم پهلوی		۴۰۰۶۷۹۹	۳۰۶۶۱۱۹۱
	پشیز			
	نقره			
۳	ده ریال	۱۰۰۰ در ۶۰۰	۸۰-	۴۰۸۰
۴	پنج ریال		۳۰۲۰	۱۰۹۲
۵	دو ریال		۱۰۶۰	۱۰۹۶
۶	یک ریال			
	برنز آلو مینیوم			
۷	پنججاه دینار	۵۹۱ در صد	۳۰۴۹	-
۸	ده »	مس	۲۰۶۸	-
۹	پنج »	۵۸ در صد	۱۰۶۵	-
	مس	آلو مینیوم		
۱۰	پنججاه دینار	-	۳۰۴۹	-

IIIV مقیاسهای سابق

طول : واحد : ذرع

اضعاف : فرسنگ = ۶۰۰۰ ذرع

اجزاء : چارك = $\frac{1}{4}$ ذرع ، گره = $\frac{1}{16}$ ذرع ، بهر = $\frac{1}{32}$ ذرع

وزن : واحد : من

اضعاف : ری = ۴ من ، خروار = ۱۰۰ من

اجزاء : چارك = $\frac{1}{4}$ من ، سیر = $\frac{1}{40}$ منمثقال = $\frac{1}{16}$ سیر : نخود = $\frac{1}{24}$ مثقال : گندم = $\frac{1}{4}$ نخود

۱۱۸ - رابطه بین مقیاسهای فعلی و قدیم

ذرع = ۱/۰۴ متر

گندم	نخود	مثقال	سیر	من	خروار
گرم ۰/۴۸	۵				
گرم ۷۵			۱		
گرم ۷۵۰			۱۰		
یک کیلو گرم	۸	۵	۱۳		
سه »				۱	
سیصد »					۱
یک تن	۸	۵	۱۳	۳۳	۳

گندم = $0/0488281$ گرم سیر = 75 گرم
 نخود = $0/1953125$ » من = 3 کیلوگرم
 متقال = $4/6875$ » خروار = 300 »

۱۱۹ = زمان

واحد : روز = مدت حرکت وضعی زمین

اجزاء : ساعت = $\frac{1}{24}$ روز دقیقه = $\frac{1}{60}$ ساعت ثانیه = $\frac{1}{60}$ دقیقه

اضعاف : هفته = 7 روز ماه = 29 ، 30 یا 31 روز
 سال شمسی = 365 روز یا 366 روز (در سال کبیسه)
 سال قمری = 354 یا 355 روز ()
 قرن = صد سال

سال شمسی ایرانی : شروع : اول فروردین مصادف
 با عبور کره زمین از نقطه اعتدال ربیعی و روز اول بهار
 سال شمسی ایرانی : 12 ماه دارد از فروردین تا شهریور
 31 روز ، از مهر تا بهمن 30 روز اسفند در سال عادی 29
 و در سال کبیسه 30 روز

سال قمری عربی : 12 ماه دارد که متناوباً 30 و
 29 روز دارند : (محرم ، صفر ، ...)

سال شمسی میلادی : شروع اول ژانویه مساوی 11 دی
 ماهها ژانویه (31) فوریه (29 یا 30) مارس (31) آوریل
 (30) مه (31) ژون (30) ژوئیه (31) اوت (31) سپتامبر
 (30) اکتبر (31) نوامبر (30) دسامبر (31)

تعدیل : در تقویم فرنگی سالهایی که عددشان به 4
 قابل قسمت باشد کبیسه اند جز آنها که بدو صفر ختم میشوند

که در اینصورت اگر عدد سال صرف نظر از صفرها به ۴ قابل قسمت باشد سال کیبسه است و الا ساده .
 در تقویم ایرانی در هر دوره ۳۳ ساله سالهای ۴ و ۸ و ۱۲ و ۱۶ و ۲۰ و ۲۴ و ۲۸ و ۳۳ کیبسه است و سایر سالها ساده

مطابقت تاریخها :

اول فروردین ۱۳۲۶ شمسی هجری در سال ۱۹۴۷ میلادی
 و ۱۳۶۶ هجری قمری واقع میشود .

XV - اعداد مرکب

۱۲۰ - تعریف : مقیاساتی را که با اجزاء و اضعاف بستگی دهدهی ندارند اعداد مرکب گویند . مانند ساعت و دقیقه و ثانیه یا درجه دقیقه ثانیه یا اندازه های سابق ایران ،
 ۱۲۱ - در اعمال حسابی مربوط با اعداد مرکب همیشه تبدیل یکهای یکهای بالا تر یا پائین تر لازم میآید و این کار بوسیله ضرب و تقسیم صورت میگیرد .

۱۲۲ - افزایش - در جمع اعداد مرکب بایستی یکهای هم نوع را زیر هم نوشت و جمع کرد و بمجرد اینکه مجموع معادل یا بزرگتر از یک بالتر باشد آن را از جنس آن یک کرد .

۱۲۳ کاهش - اگر اعداد نماینده یکهای مختلف در کاهشیاب بزرگتر از اعداد نظیر خود در کاسته باشند عمل بسهولت انجام پذیر است .

هر گاه یکی از اعداد نماینده یکیه های مختلف در کاهشیاب کوچکتر از عدد نظیر خود در کاسته باشد باید در کاهشیاب يك يکۀ مرتبه بعد را از جنس يکۀ مرتبه پائین کرد و بآن افزود آنگاه عمل کاهش را بجا آورد .

۱۲۴ ضرب - برای ضرب اعداد مرکب در يك عدد آن عدد را در هريك از اعداد نماینده یکیه های مختلف ضرب نموده در حاصل ضرب یکیه ها را در صورت احتیاج يکۀ بالاتر تبدیل میکنیم .

۱۲۵ تقسیم - برای تقسیم اعداد مرکب بر يك عدد، ابتدا از عدد نماینده بزرگترین یکیه شروع کرده عمل تقسیم را بجا می آوریم بهر را نوشته باقیمانده را از جنس یکیه مرتبه پائین کرده بر عدد نماینده همان یکیه در بخشی افزوده در مجموع عمل تقسیم را انجام میدهیم ، باقیمانده جدید را از جنس يکۀ مرتبه کوچکتر کرده و عمل را آنقدر ادامه می دهیم تا تقسیم به پایان رسد .

XVI اربعه متناسبه

۱۲۶ تعریف - مراد از اربعه متناسبه یا بطور مختصر تناسب قواعدی است که بمدد آن مسائلی حل میشود که در آنها کمیتی نسبت مستقیم یا معکوس با چند کمیت دیگر داشته باشد و از آن کمیت يك مقدار معلوم در دست بوده و بمدد نسبت های مفروض باید يك مقدار مجهول آنرا بدست آورد

۱۲۷ - هر گاه تعداد عوامل معلوم و مجهول از ۴

تجاوز نکند تناسب مفرد و اگر عدد آنها بیش از ۴ باشد تناسب را مرکب گویند.

۱۲۸ - هر گاه در تناسب، نسبت بین کمیات مستقیم باشد تناسب را مستقیم و الا معکوس گویند.

۱۲۹ قاعده - برای حل تناسب مفرد مستقیم مقدار همجنس کمیت مجهول را در نسبت معکوس دو مقدار کمیت دیگر ضرب میکنیم

۱۳۰ - قاعده - برای حل تناسب مفرد معکوس مقدار همجنس کمیت مجهول را در نسبت مستقیم دو مقدار کمیت دیگر ضرب میکنیم.

۱۳۱ قاعده - برای حل مسائل تناسب مرکب کمیتی را که يك مقدار آن مجهول است پی در پی با هر دو مقدار همجنس از کمیات دیگر می‌سنجیم و بمورد نسبت مستقیم یا نسبت معکوس دو بدو آن مقادیر را تشکیل داده مقدار همجنس مجهول را در حاصل ضرب کلیه نسبتها ضرب می‌کنیم تا مقدار مطلوب بدست آید

XVII - آمیزه و آلیاژ

۱۳۲ - هر گاه چند نوع از کالائی را که بهای آن مختلف باشد با هم بیامیزیم کالای آمیخته دارای بهای خاصی است که «بهای متوسط» یا نرخ متوسط نامیده میشود. مقداری را که از هر نوع کالای مفروض برداشته‌ایم نسبت آمیزش گویند مسائل آمیزه بر دو نوعند: ۱ - نسبت آمیزش معلوم است، باید بهای متوسط را یافت. ۲ - بهای متوسط معلوم است، باید نسبت آمیزش را بدست آورد.

۱۳۳ - در مسائل نوع اول برای بدست آوردن نرخ متوسط قیمت کلیه مقداری را که از هر جنس برداشته میشود حساب نموده حاصل جمع قیمتها را بر مجموع مقدار کالا تقسیم مینمائیم

۱۳۴ - وقتی نرخ اجناس و نرخ متوسط در دست باشد برای بدست آوردن نسبتی که از هر جنس باید برداشت باین طریق عمل میکنیم: میزان سود یا زیان حاصل از هر نوع جنس را تعیین نموده سودها را با هم و زیانها را با هم جمع می کنیم بعد به نسبت مجموع زیانها از اجناس سود بخش و به نسبت مجموع سودها از جنس های زیان بخش برداشته با هم مخلوط میکنیم.

۱۳۵ آلیاژ - جسمی است که از ذوب چند فلز با یکدیگر بدست آید. هر گاه از یک فلز گرانبها مانند زریا نقره با فلز دیگری چون مس آلیاژی ترکیب کنیم مقدار فلز قیمتی را که در هر هزار جزء آلیاژ وجود دارد عیار آن نامند

۱۳۶ - برای بدست آوردن وزن فلز قیمتی در یک آلیاژ کافی است وزن آلیاژ را در عیار آن ضرب کرد.

۱۳۷ - مسائل آلیاژ مانند مسائل آمیزه حل میشوند.

XVIN مرابحه مفرد (بهره کاری)

۱۳۸ - معمولا هر کس پولی بوام بگیرد برای آن گرایه ای قائل میشود که بهره یا ربح نام دارد.

۱۳۹ - بهره نسبت مستقیم با سرمایه، با مدتی که سرمایه در مرابحه بوده است و با نرخ دارد. نرخ یعنی میزان

اجاره واحدیکه در زمان معینی برای سرمایه معینی قایل میشوند
نرخ فرنگی یا در صد یعنی سود ۱۰۰ ریال در یکسال
نرخ ایرانی یعنی سود ۱۰ ریال در یک ماه

۱۴۰ - برای تبدیل نرخ ایرانی بنرخ در صد کافیست
آنها بر حسب شاهی (۵ دینار) بیان نمود و در ۶ ضرب کرد
مثال : نرخ تومانی (ده ریال) چهار شاهی در ماه برابر
است با 6×4 یعنی ۲۴٪ در سال.

۱۴۱ - اگر سرمایه را s ، مدت را m ، نرخ را n
و بهره را b بنامیم و مدت را بر حسب سال بیان کنیم :

$$b = \frac{n \times m \times s}{100} \quad s = \frac{b \times 100}{n \times m}$$

$$m = \frac{b \times 100}{n \times s} \quad n = \frac{b \times 100}{m \times s}$$

تبصره - در مسائل بهره کاری یک سال ۳۶۰ و ماه
۳۰ روز حساب میشود.

۱۴۲ - در مرابحه مفرد سرمایه ثابت است یعنی سود
سالیانه آن بآن افزوده نمی شود .

در نوع دیگری از مرابحه در آخر سال سود سالیانه را
بسرمایه اضافه میکنند . آنها مرابحه یا (بهره کاری) مرکب
گویند (رجوع شود بقسمت جبر)

XIX تنزیل

۱۴۳ - در بازرگانی اغلب بجای پول نقد باشخاص سندی
داده میشود که در تاریخ معینی قابل پرداخت است و اگر دارنده

آن سند بخواهد زود تر از آن تاریخ که بسر رسید موسومست سند را پول تبدیل کند باید مبلغی بنام تنزیل کسر کند و بقیه را دریافت دارد. مبلغی را که در سند بازرگانی نوشته شده ارزش اسمی و مبلغی که بعد از کسر تنزیل پرداخته میشود ارزش فعلی آن است *

۱۴۴ - تنزیل با ارزش اسمی و مدت و نرخ تنزیل نسبت مستقیم دارد و مسائل آن عینا مانند مرا بجه حل میشود *

۱۴۵ - اگر تنزیل از ارزش اسمی سند کسر شود تنزیل بیرونی و اگر از ارزش فعلی کسر شود تنزیل درونی نامیده میشود
۱۴۶ - تنزیل درونی عادلانه تر است ولی متداول نیست

$$\text{تنزیل درونی} = \text{س} - \frac{\text{س} \times ۱۰۰}{۱۰۰ + \frac{\text{ن} \times \text{م}}{۳۶۰}}$$

XX جذر

۱۴۷ - تعریف جذر - جذر یاریشه دوم هر عدد A عددیست a که

$$a^2 \geq A < (a+1)^2$$

۱۴۸ - برای استخراج جذر اعدادی بین ۱ و ۱۰۰ در نظر داشتن جذر اعداد يك پیکری که عبارتند از:

جذر ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

مجدور ۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵ ۳۶ ۴۹ ۶۴ ۸۱ ۱۰۰

لازم است جذر اعدادی که بین دو عدد پیاپی از سطر دوم قرار دارند بین دو عدد نظایر شان از سطر اول می باشد و جذر

تقریبی آنها تا يك يكه تقریب باسانی بدست میآید .
 ۱۴۹ - برای استخراج جذر اعداد از ۱۰۰ بیالا تا يك
 یكه تقریب بطریق زیر عمل میکنیم :

عدد را از سمت راست بقطعات دو رقمی تقسیم میکنیم
 جذر قطعه اول سمت چپ را تعیین مینمائیم و مجذور آنرا از
 همان قطعه اول سمت چپ کم میکنیم و قطعه دوم را در سمت
 راست این باقیمانده پائین میآوریم و يك رقم از سمت راست
 عدد حاصل جدا نموده جزء سمت چپ را بر دو برابر رقم
 جذر اولین قطعه سمت چپ تقسیم میکنیم خارج قسمت دومین
 رقم جذر عدد مفروض یا بزرگتر از آنست . برای امتحان
 آنرا در سمت راست دو برابر اولین رقم جذر نوشته حاصل
 را در خود آن عدد ضرب میکنیم و از عددی که از اولین
 باقیمانده و قطعه دوم تشکیل شده است کم میکنیم ؛ اگر
 تفریق ممکن شد رقم امتحان شده رقم دوم جذر است و آن
 را در سمت راست رقم اول جذر مینویسیم والا يك واحد از
 آن کاسته مجدداً امتحان میکنیم تا وقتی که تفریق ممکن
 شود آنوقت قطعه دیگر را در سمت راست باقیمانده فرود آورده
 بطریق بالا عمل میکنیم تا بهمین طریق تمام قطعات بکار روند مثال :

۱۱۷۳۳۸	۳۴۲	
۹	۶۴ ×	۶۸۲ ×
۲۷۳	۴	۲
۲۵۶	۲۵۶	۱۳۶۴
۱۷۳۸		
۱۳۶۴		
۳۷۴		

عدد ۳۴۲ جذر و ۳۷۴ باقیمانده است

۱۵۰ - برای استخراج جذر اعداد دهدهی تا يك يکه
تقریب از جزء دهدهی صرف نظر نموده جذر قسمت درست
را تا يك يکه تقریب استخراج میکنیم و جزء دهدهی را به باقیمانده
جذر میافزائیم .

مثال :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7,9572,4} & 28 \\ 395 & 48 \times \\ 384 & 8 \\ \hline 11724 & 384 \end{array}$$

عدد ۲۸ جذر و ۱۱۷۲۴ باقیمانده است .

۱۵۱ - برای استخراج جذر يك عدد درست یا دهدهی
تا ۰٫۱ یا ۰٫۰۱ یا ... تقریب عدد را از ممیز بطرف راست
و چپ بقطعات دو رقمی تقسیم نموده و قطعات سمت راست
(بعد از ممیز) را با گذاردن يك یا چند صفر کامل میکنیم
بطریقی که به تعداد رقمهای دهدهی که میخواهیم در جذر
داشته باشیم بعد از ممیز قطعه دو رقمی باشد؛ مثلاً اگر منظور
محاسبه جذر تا ۰٫۰۰۱ تقریب است باید بعد از ممیز ۶ رقم داشته
باشیم . بعد جذر را بقاعده بالا تعیین نموده وقتی در عدد
بمیز رسیدیم در جذر نیز ممیز میزنیم و عمل را مانند وقتی
که ممیز نباشد ادامه میدهیم .

مثال - جذر ۴۹۵ تا ۰٫۰۱ تقریب :

$\sqrt{49,000,000}$	۲۲۲۴		
۴۹۵	$42 \times$	$442 \times$	$4444 \times$
۸۴	۲	۲	۴
۱۱۰۰	۸۴	۸۸۴	۱۷۷۷۶
۸۸۴			
۲۱۶۰۰			
۱۷۷۷۶			
۳۸۲۴			

عدد ۲۲/۲۴ جذر و ۰/۳۸۲۴ باقیمانده است .

۱۵۲ - امتحان جذر!

جذری را که استخراج شده است مجدور نموده با باقیمانده جمع میکنیم، در صورت صحت باید خود عدد بدست آید.

XII - کعب

۱۵۳ - کعب یا ریشه سوم عدد A عدد a است بقسمی که

$$a^3 \leq A < (a+1)^3$$

۱۵۴ - برای استخراج کعب اعداد واقع بین ۱ و

۱۰۰۰ در نظر داشتن مکعب اعداد يك پیکری که عبارتند از

کعب ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

مکعب ۱ ۸ ۲۷ ۶۴ ۱۲۵ ۲۱۶ ۳۴۳ ۵۱۲ ۷۲۹ ۱۰۰۰

لازم است و کعب اعدادی که بین دو عدد پیاپی از سطر دوم قرار دارند بین دو عدد نظیرشان از سطر اول میباشد و کعب تقریبی آنها تا يك يکۀ تقریب باسانی بدست میآید.

۱۵۵ - برای استخراج کعب اعداد از ۱۰۰۰ پیالا

تا يك يكه تقریب بطریق زیر عمل میکنیم :

عدد را از سمت راست بقطعات سه رقمی تقسیم میکنیم، کعب قطعه اول سمت چپ را تعیین مینمائیم و قطعه دوم را در سمت راست باقیمانده پائین میآوریم، دو رقم از سمت راستش کنار میگذاریم و جزء سمت چپ را بر سه برابر مجذور رقم اول کعب تقسیم میکنیم، رقم خارج قسمت رقم دوم کعب یا قدری بزرگتر است؛ برای امتحان :

اولا، سه برابر مربع اولین رقم کعب را در ۱۰۰ ضرب کرده مینویسیم،

ثانیا، سه برابر اولین رقم کعب را در عدد امتحان کردنی و در ۱۰ ضرب کرده مینویسیم،

ثالثا، عدد امتحان کردنی را مربع کرده مینویسیم و این عدد ها را جمع نموده حاصل جمع را در عدد امتحان کردنی ضرب میکنیم، اگر حاصل از عددی که از اولین باقیمانده و قطعه دوم تشکیل شده قابل تفریق باشد عدد امتحان کردنی همان رقم دوم کعب است والا باید يك واحد از آن کم و امتحان را تکرار کرد و آنقدر امتحان را تجدید نمود تا تفریق ممکن شود؛ بعد این رقم را در سمت راست کعب قطعه دوم نوشته قطعه سوم را پائین میآوریم و بهمین طریق عمل را تکرار میکنیم تا تمام قطعات بکار روند.

مثال :

$\sqrt{۳۳۴۷۱۳۲۴}$	۳۱۹	
۲۷	$۳ \times ۳^۲ = ۲۷$	$۳ \times ۳۱^۲ = ۲۸۸۳$
۵۴۷۱	$۳ \times ۳^۲ \times ۱۰۰ = ۲۷۰۰$	$۳ \times ۳۱^۲ \times ۱۰۰ = ۲۸۸۳۰۰$
۲۷۹۱	$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱۰ = ۱۸۰$	$۳ \times ۳۱ \times ۹ \times ۱۰ = ۸۳۷۰$
۲۶۸۰۴۲۴	$۲^۲ = ۴$	$۹^۲ = ۸۱$
۲۶۷۰۷۵۹	۲۸۸۴	۲۹۶۷۵۱
۰۰۰۹۵۶۵	۴	۹
	۵۷۶۸ قابل قبول نیست	۲۶۷ ۷۵۹
	$۳ \times ۳^۲ \times ۱۰۰ = ۲۷۰۰$	
	$۳ \times ۳ \times ۱ \times ۱۰ = ۹۰$	
	$۱^۲ = ۱$	
	۲۷۹۱	
	۱	
	۲۷۹۱	

عدد ۳۱۹ کعب و ۹۵۶۵ باقیمانده است .

۱۵۶ - قاعده استخراج کعب اعداد دهدهی. نظیر همان

قاعده ایست که درباره جذر ذکر شد .

۱۵۷ - استخراج کعب تا ۱۰۰۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰۰۰۰ یا

... تقریب شبیه به همان است که در جذر گفته شد ، فقط باید

قطعات بعد از ممیز بازاء هر يك رقم دهدهی در کعب سه رقم

دهدهی در عدد مفروض باشد .

XXII - اعداد اصم

۱۵۸ - هرگاه در موقع استخراج ریشه دوم یا ریشه سوم

يك عدد ، هر قدر عمل را ادامه دهیم باقیمانده مساوی صفر

نشود عدد را اصم یا گنگ گویند. اعداد غیر اصم را منطق یا گویا نامند.

۱۵۹ - بجای اعداد اصم در محاسبات عددی معمولاً مقدار تقریبی آنها را بکار میبرند.

۱۶۰ - در مورد جمع و تفریق و ضرب و تقسیم اعداد اصم مقادیر تقریبی آنها را بکار میبریم؛ بدیهی است که نتیجه تقریبی بدست خواهد آمد.

۱۶۱ - ضرب و تقسیم ریشه دوم (جذر) :

۱ - حاصل ضرب دو عامل اصم \sqrt{a} و \sqrt{b} عبارتست از

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

ممکن است حاصل ضرب ریشه‌های دوم دو مقدار اصم

مقدار منطقی باشد؛ مثلاً : $\sqrt{۱۸} \times \sqrt{۸} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$

۲ - حاصل ضرب عدد a در عامل اصم \sqrt{b} عبارتست از

$$a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

۳ - خارج قسمت دو عامل اصم \sqrt{a} و \sqrt{b} عبارتست از

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

ممکن است خارج قسمت ریشه‌های دوم دو مقدار اصم مقدار

منطقی باشد؛ مثلاً :

$$\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۸}} = \sqrt{\frac{۱۸}{۸}} = \sqrt{\frac{۹}{۴}} = \frac{۳}{۲}$$

۴ - معمولا در محاسبات اگر مخرج کسری ریشه دوم عدد اصمی باشد با ضرب صورت و مخرج کسر در مخرج کسر مخرج را منطق مینمایند؛ مثلا :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad \text{و} \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}-b} = \frac{\sqrt{a}+b}{a-b^2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

پایان

I - تعاریف

۱- جبر علمی است که برای تعمیم دستورها و تسهیل حل مسائل بکار میرود.

۲- **حرفها** - در جبر مقادیر معلوم را معمولاً با حروف اول الفباء لاتین (a و b و c و) و مقادیر مجهول را با حروف آخر (x و y و z و غیره) نمایش میدهند.

۳- **نشانه‌ها** - نشانه‌ها یا علامات برای نشان دادن اعمال یا رابطه‌هایی که باید بین اعداد و حروف برقرار باشد بکار میروند.

علامت $+$ نشانه جمع، علامت $-$ نشانه تفریق، علامت \times یا \cdot نشانه ضرب و علامت $:$ یا $-$ نشانه تقسیم دو عدد میباشند.

علامت $=$ نشانه مساوی بودن و علامت \neq نشانه اختلاف و علامت $<$ نشانه بزرگتر یا کوچکتر بودن است بطوری که در داخل زاویه عدد بزرگتر و بیرون زاویه عدد کوچکتر نوشته میشود مثلاً $a < b$ نشان میدهد که a کوچکتر است از b . و $a \geq b$ نشان میدهد که b بزرگتر یا اقلاً مساوی a میباشد. وقتی مقادیری با علامت $+$ یا $-$ یا \times یا $:$ در داخل پرانتز () یا کروشه [] یا آکولاد { } قرار داشته

باشند حکم مقدار واحد را پیدا میکنند.

علامت $\sqrt[n]{\quad}$ علامت استخراج ریشه n ام مقدار واقع در زیر $\sqrt{\quad}$ است.

۴ - یادآوری - باید متذکر بود که در موقع حساب کردن هر عبارتی که در آن اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم باشد باید اول اعمال ضرب و تقسیم و بعد اعمال جمع و تفریق را انجام داد.

۵ - عدد جبری - پولی که وارد صندوق يك تجارتخانه

میشود یا از آن خارج میگردد هر دو پولند و لسی در معنی اختلاف دارند اولی به پول موجود در صندوق اضافه شده و دومی از آن کسر گردیده است؛ میگویند جهت پول اول با دوم فرق دارد و برای تمیز دادن آنها از یکدیگر اولی را با علامت $+$ (مثبت) و دومی را با علامت $-$ (منفی) نشانه میکنند و این عدد حسابی را که بایکی از دو علامت مذکور ممتاز شده است عدد جبری نامند. عدد جبری ۵ - تلفظ میشود منهای ۵ و $۷ +$ تلفظ میشود باضافه ۷.

۶ - عدد های حسابی را قدر مطلق عددهای جبری گویند مثلاً در مثال بالا عدد حسابی ۵ قدر مطلق عدد جبری ۵ - میباشد.

۷ - دو عدد جبری مساویند وقتی که دارای يك قدر مطلق و يك نشانه باشند.

۸ - دو عدد جبری قرینه اند وقتی که دارای يك قدر مطلق ولی نشانه های مختلف باشند.

۹- یادآوری - بعضی مواقع در عمل نشانه $+$ را از جلوی اعداد جبری برداشته و آنها را بدون نشانه مینویسند؛ ولی هیچوقت اعداد منفی را بدون نشانه - مینویسند.

۱۰- عبارت جبری - مجموعه‌ای از حروف و اعداد و علاماتی را که در یک رشته محاسبات بکار میروند عبارت جبری می نامند.

۱۱- عبارت جبری منطق (گویا) است وقتی که در آن حرفی زیر رادیکال نباشد و در غیر اینصورت اصم است.

۱۲- عبارت جبری صحیح است وقتی که شامل حرفی در مخرج نباشد و در غیر اینصورت کسری است.

۱۳- دو عبارت جبری را متعادل گویند وقتی مقدار عددی آنها با اتمام مقادیری که بجای حروف بگذاریم مساوی باشند.

۱۴- تساوی بین دو عبارت عددی و یا دو عبارت جبری متعادل را اتحاد گویند و بین آنها این علامت \equiv (تلفظ میشود متحد است با) را میگذارند.

۱۵- اگر تساوی بین دو عبارت جبری فقط و فقط با اء مقادیر مخصوصی از حروف برقرار شود آن تساوی را معادله گویند.

۱۶- یکجمله - اگر عبارتی جبری از حاصل ضرب اعداد جبری با حروف بدست آمده باشد آن را یکجمله یا منم گویند.

۱۷- ضریب - عامل عددی هر یکجمله را ضریب آن گویند.

۱۸- یکجمله‌های متشابه اختلافشان فقط در ضرایبشان میباشد.

۱۹- چند جمله - مجموع چند یکجمله يك چند جمله یا پلی نیم را تشکیل میدهند.

II - جمع اعداد جبری

۲۰- برای جمع دو عدد متحدالعلامه قدر مطلق آنها را جمع نموده علامت مشترك را میگذاریم.

۲۱- برای جمع دو عدد مختلفالعلامه قدر مطلق آنها را از هم کم نموده علامت عددی را که بر حسب قدر مطلق بزرگتر است میگذاریم.

III - تفریق اعداد جبری

۲۲- برای کم کردن عدد b از a قرینه b را با جمع می کنیم.

IV - ضرب اعداد جبری

۲۳- حاصلضرب دو عدد متحدالعلامه مثبت و حاصلضرب دو عدد مختلفالعلامه منفی است.

۲۴- برای ضرب چند عدد جبری قدر مطلق آنها را ضرب نموده اگر تعداد اعداد منفی زوج باشد جلو حاصلضرب $+$ و اگر فرد باشد $-$ میگذاریم.

V - تقسیم اعداد جبری

۲۵- برای تقسیم دو عدد جبری قدر مطلق آنها را تقسیم نموده اگر هر دو متحدالعلامه باشند جلوی خارج قسمت

+ و اگر مختلف علامه باشند — قرار میدهیم.

VI- قوه (توان)

۲۶ - برای تعریف قوه m ام رجوع شود بشماره ۲۹

بخش حساب *

۲۷ - قوه m ام هر عدد مثبت همواره مثبت است .

۲۸ - قوه m ام عدد منفی مثبت است اگر m زوج باشد

و منفی است اگر m فرد باشد.

۲۹ - ضرب چند قوه - ۱ - اگر پایه ها مشترك باشند

یکی از پایه ها را نوشته و نماها را با هم جمع میکنیم :

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$

ب - اگر نماها مساوی باشند پایه ها را در هم ضرب

نموده نمای مشترك را نما قرار میدهیم :

$$a^m \cdot b^m \cdot c^m = (abc)^m$$

۳۰ - تقسیم دو قوه - ۱ - اگر پایه ها مساوی باشند

یکی از پایه ها را نوشته نماها را از هم کم میکنیم :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ب - اگر نماها مساوی باشند پایه ها را تقسیم نموده

نمای مشترك را نما قرار میدهیم

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

۳۱- یادآوری- هر عدد بقوه صفر مساوی است بایک.

۳۲- قوه کسری - اگر داشته باشیم $\sqrt[q]{a}^p$ آنرا

میتوان باینصورت نوشت :

$$\sqrt[q]{a}^p = a^{\frac{p}{q}}$$

۱- حاصل ضرب دو قوه کسری يك عدد :

$$\frac{p}{a^q} \cdot \frac{p'}{a^{q'}} = a^{\frac{pq' + qp'}{qq'}}$$

ب خارج قسمت دو قوه کسری يك عدد :

$$\frac{\frac{p}{a^q}}{\frac{p'}{a^{q'}}} = a^{\frac{pq' - qp'}{qq'}}$$

ج- قوه کسری حاصل ضرب چند عدد :

$$\left(\frac{p}{a^q} \right) \left(\frac{p'}{a^{q'}} \right) \left(\frac{p''}{a^{q''}} \right) \left(\frac{p'''}{a^{q'''}} \right) = a^{\frac{pq' + p'q'' + p''q''' + p'''q}{qq'q''q'''}}$$

د - بقوه کسری رساندن قوی کسری يك عدد :

$$\left(\frac{p}{a^q} \right) \frac{p'}{q'} = a^{\frac{pp'}{qq'}}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

۳۴- قوه منفی :

۱- حاصل ضرب دو قوه منفی از يك عدد

$$a^{-m} \times a^{-m'} = a^{-(m+m')} = \frac{1}{a^{m+m'}}$$

ب - خارج قسمت دو قوه منفی از يك عدد :

$$\frac{a^{-m}}{a^{-m'}} = a^{m'-m} = \frac{1}{a^{m-m'}}$$

ج - قوه منفی حاصل ضرب چند عدد

$$(abc)^{-m} = a^{-m} \times b^{-m} \times c^{-m}$$

د - بقوه منفی رساندن قوه منفی يك عدد

$$(a^{-m})^{-m'} = a^{mm'}$$

این روابط بر حسب تغییر علامت m و m' متغیر میباشند.

$$a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\frac{p}{a}}$$

ه - قوه منفی کسری:

VII - جمع جمل جبری

۳۴ - برای جمع چند جمله جبری متشابه یکی از آنها را نوشته و ضرائب آنها را جمع جبری مینمائیم.

۳۵ - برای جمع چند کثیرالجمله ، جمل متشابه را با هم جمع نموده و جمل غیر متشابه را دنبال آنها مینویسیم.

VIII - تفریق جمل جبری

۳۶ - برای تفریق دو کثیرالجمله علامت جمل کاسته را تغییر داده و با کاهشیا بجمع جبری مینمائیم .

IX - ضرب جمل جبری

۳۷ - حاصل ضرب چند يك جمله يك جمله ایست که ضربش مساوی حاصل ضرب ضرائب آنها بوده شامل تمام حروف آن جمل باشد ، نمای هر يك از حروف مساوی مجموع نمائیس که آن حرف در هر یک جمله داشته باشد .

۳۸ - برای ضرب یکجمله در يك كـثیرالجمله يك - جمله مزبور را در هر يك از جمل كثیرالجمله ضرب مینمائیم و حاصل ضربها را با هم جمع جبری میکنیم .

۳۹ - برای ضرب دو كثیرالجمله هر يك از جمل كثیر - الجمله اول را در كثیرالجمله دوم ضرب نموده و حاصل ضربها را با هم جمع جبری میکنیم .

X - تقسیم جمل جبری

۴۰ - برای تقسیم دو جمله جبری ضرائب آنها را تقسیم جبری نموده اجزاء نظیر هم را بر هم تقسیم میکنیم ، مثال :

$$\frac{+12a^2}{15ab} = \frac{4}{5} \frac{a}{b}$$

۴۱ - برای تقسیم يك كـثیر الجمله بر یکجمله اول كثیرالجمله مقسوم را بر حسب قوای نزولی مرتب نموده بعد هر يك از جمل را بر یکجمله مقسوم علیه تقسیم مینمائیم و خارج قسمتها را با هم جمع جبری میکنیم . مثال :

$$\frac{24a^2 - 6a}{-2a} = -12a + 3$$

۴۲ - برای تقسیم دو كثیرالجمله آنها را بترتیب قوای نزولی مرتب نموده جمله اول مقسوم را بر اولین جمله مقسوم - علیه تقسیم کرده خارج قسمت را در تمام جمل مقسوم علیه ضرب نموده حاصل ضرب را از مقسوم کم میکنیم تا اولین باقیمانده بدست آید، بعد اولین جمله مانده را بر جمله اول مقسوم علیه تقسیم کرده خارج قسمت را در تمام جمل مقسوم علیه ضرب مینمائیم و حاصل را از جمله های مانده کم میکنیم تا دومین مانده

بدست آید و به همین طریق عمل را ادامه میدهیم تا وقتی که باقیمانده دیگر بر مقسوم علیه قابل قسمت نباشد.

$$\begin{array}{r} a^3 + 2a^2b + b^3 \quad | \quad a+b \\ a^3 + a^2b \quad | \quad a^2 + ab - b^2 \\ \hline a^2b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2b + ab^2 \\ - ab^2 + b^3 \\ \hline - ab^2 - b^3 \\ \hline 0 + 2b^3 \end{array}$$

۴۳- قابلیت تقسیم کثیر الجمله از x بر $(x+a)$ - کثیر-

الجمله $P(x)$ بر $(x+a)$ وقتی قابل قسمت است که اگر در $P(x)$

بجای x ، $-a$ قرار دهیم حاصل صفر شود یعنی $P(-a) = 0$ مثال :

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

بر $x+a$ قابل قسمت است زیرا چون در آن بجای x مقدار

$(-a)$ را قرار دهیم حاصل $0 = a^3 + 3a^3 - 3a^3 + a^3$ می شود.

همچنین $P(n)$ بر $x-a$ وقتی قابل قسمت است که

اگر در آن بجای x مقدار a بگذاریم حاصل صفر شود.

x - اتحادهای مهم

۴۴- تعریف- اتحاد عبارت از يك تساوی است که بازای

جميع مقادیری که در دو طرف آن بجای حروف قرار دهیم همواره

صحیح باشد. برای ممتاز ساختن اتحادها از تساویهای معمولی غالباً بین طرفین بجای $=$ علامت \equiv گذاشته میشود.

$$(۱) (a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$(۲) (a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

$$(۳) (a-b)(a+b) \equiv a^2 - b^2$$

$$(۴) (a+b+c+d)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$(۵) (a+b)^3 \equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(۶) (a-b)^3 \equiv a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a^3 + b^3) \equiv (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a^3 - b^3) \equiv (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

۴۵ رابطه فیتاغورث :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \equiv ab$$

۴۶ رابطه اولر :

$$a(c-b) + b(a-c) + c(b-a) \equiv 0$$

۵۲- رابطه استوارت :

$$a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) + (c-b)(a-c)(b-a) \equiv 0$$

۴۷ - بینم (دو جمله) نیوتن

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^{n-2}b^2 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p} a^{n-p} a^p + \dots$$

$$\dots + a^n$$

XII ریشه و ریشکی ها

تعریف - ریشه m ام عدد A عددی است مانند a که اگر

بقوه m ام برسد حاصل مساوی A گردد

$$\sqrt[m]{A} = a \quad a^m = A$$

m را نماینده یا شمار ریشکی گویند.

۴۹ - ریشه اعداد جبری

(۱) ریشه زوج هر عدد مثبت دو عدد قرینه است،

$$\sqrt[4]{625} = \pm 5$$

(ب) اعداد منفی دارای ریشه زوج نیستند.

(ج) علامت ریشه فرد هر عدد با علامت خود آن یکیست.

۵۰ - ریشه دوم -۱ - عددیست موهوم و آنرا مساوی i

فرض میکنند،

$$\sqrt{-1} = i$$

۵۱ - اگر نماینده ریشکی و نمای مقدار زیر آنرا در

عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کنند در مقدار ریشکی تغییری

حاصل نمیشود،

$$\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[nm]{a^{pn}} = \sqrt{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{n}}$$

۵۲ - تحویل چند ریشگی يك نماینده -

برای تحویل چند ریشگی بر ریشگی هائی که دارای يك نماینده باشند كوچك ترین مضرب مشترك نماینده های ریشگی ها را نماینده مشترك قرار داده و آنرا بر نماینده هر ریشگی تقسیم و حاصل را در نمای مقدار زیر ریشگی ضرب مینمائیم.

مثال - میخواهیم نماینده ریشگی های $\sqrt[6]{a}$ $\sqrt[8]{b^3}$ $\sqrt[9]{n^4}$

را یکی نمائیم، کم ۶ و ۸ و ۹ عدد ۷۲ است، پس:

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[72]{a^{12}} \quad \sqrt[8]{b^3} = \sqrt[72]{b^{27}} \quad \sqrt[9]{n^4} = \sqrt[72]{n^{32}}$$

۵۳ - ضرب ریشگی ها

۱ - برای ضرب چند ریشگی که دارای نماینده مشترك

m باشند مقدار زیر ریشگی ها را ضرب نموده و از حاصل ضرب ریشه m ام میگیریم:

$$\sqrt[m]{a^p} \sqrt[m]{b^q} \sqrt[m]{c^r} = \sqrt[m]{a^p b^q c^r}$$

ب - برای ضرب چند ریشگی که دارای نماینده مشترك

نباشند نخست نماینده ریشگی ها را یکی میکنیم سپس مانند حالت قبل ضرب مینمائیم.

۵۴ - تقسیم ریشگی ها

۱ - برای تقسیم دو ریشگی که دارای نماینده مشترك

m باشند مقادیر زیر ریشگی ها را تقسیم نموده و از خارج قسمت ریشه m ام میگیریم

$$\frac{\sqrt[m]{a^p}}{\sqrt[m]{b^q}} = \sqrt[m]{\frac{a^p}{b^q}}$$

ب - برای تقسیم دو ریشگی که دارای نماینده مشترک نباشند نخست نماینده آنها را مساوی نموده بعد آنها را تقسیم مینمائیم.

۵۵ - برای اینکه عددی را داخل يك ریشگی نمائیم آنها را بقوه نماینده ریشگی رسانده در مقدار زیر ریشگی ضرب می کنیم:

$$a^m \cdot \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{a^{mp} \cdot b}$$

۵۶ - برای اینکه عددی را از زیر ریشگی خارج کنیم نمای آنها را بر نماینده ریشگی تقسیم میکنیم و خارج قسمت را نمای آن عدد در خارج ریشگی و باقیمانده تقسیم را نمای آن عدد در زیر ریشگی قرار میدهیم:

$$\sqrt[7]{a^2 b^{11} c^{14}} = bc^2 \sqrt[7]{a^2 b^4}$$

۵۷ - برای اینکه ریشگی را بقوه ای برسانیم کافیست مقدار زیر ریشگی را بآن قوه برسانیم:

$$\left(\sqrt[m]{a} \right)^p = \sqrt[m]{a^p}$$

۵۸ - برای آنکه از ریشه m ام عددی ریشه n ام

بگیریم کافی است که از آن ریشه mn ام بگیریم

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

۵۹ - تعریف - حرفی را که زیر ریشگی باشد و نتوان

آنها خارج نمود گنگ گویند و اگر از زیر ریشگی خارج شود گویا نامند.

۶۰ - گویا نمودن کسری که مخرجش گنگ باشد.

۱ - مخرج کسر يك جمله است - برای گویا کردن

آن صورت و مخرج کسر را در عبارتی ضرب میکنیم که مخرج

گویا شود، مثلاً اگر مخرج $\sqrt[m]{b^p}$ باشد صورت و مخرج

را در $\sqrt[m]{b^{m-p}}$ ضرب میکنیم

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b^p}} = \frac{a \times \sqrt[m]{b^{m-p}}}{\sqrt[m]{b^p} \times \sqrt[m]{b^{m-p}}} = \frac{a \times \sqrt[m]{b^{m-p}}}{b}$$

تعریف - مزدوج دو جمله $a+b$ دو جمله $a-b$ است.

ب - مخرج کسر دو جمله است - برای گویا کردن کسر

صورت و مخرج آن را در مزدوج مخرج ضرب میکنیم

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

XIII - معادلات

۶۱ - تعریف - معادله عبارت از يك تساوی است که

فقط دو طرف آن با $يك$ يا چند مقدار معين كه بجای مجهول آن قرار میدهیم با يكديگر مساوی شوند.

۶۲ - توجه کنید! فرق معادله با اتحاد این است كه

معادله با $يك$ يا چند مقدار معين صحيح است و اتحاد با $زاء$ جمع مقادير .

۶۳ - خواص معادلات

۱ - اگر بر طرفين معادله $يك$ عدد جبری اضافه كنیم در معادله

تفاوتی حاصل نمیشود.

۲ - اگر طرفين معادله را بر $يك$ عدد تقسیم یا در $يك$ عدد

ضرب بنمائیم در معادله تغییری حاصل نمیشود.

۳ - اگر عددی را از $يك$ طرف معادله بطرف دیگر

بیریم باید علامت آنرا تغییر دهیم.

۶۴ - حل و بحث معادلات درجه اول

معادله درجه اول $يك$ مجهولی پس از اختصار بصورت

كلی $ax=b$ نوشته میشود .

اگر $a \neq 0$ باشد معادله دارای $يك$ ریشه $x = \frac{b}{a}$

خواهد بود .

اگر $a=0$ و $b \neq 0$ باشد معادله غیر ممکن است .

اگر $a=0$ و $b=0$ باشد معادله مبهم است .

اگر $a \neq 0$ و $b=0$ باشد ریشه معادله صفر است .

برای اینکه دو معادله درجه اول $ax=b$ و $a'x=b'$

دارای $يك$ ریشه باشند باید $ab'-ba'=0$ باشد .

۶۵ - دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول

دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول پس از

اختصار باین صورت نوشته میشود:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

برای حل دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه

اول چهار طریق معمول است :

۱ - طریقه تحویل - از معادله اول بفرض معلوم

بودن یکی از مجهولها مجهول دیگر را بدست آورده در

معادله دوم قرار میدهیم، در نتیجه يك معادله يك مجهولی

درجه اول پیدا میشود که با حل آن یکی از مجهولها بدست

میآید. با معلوم شدن يك مجهول پیدا کردن دیگری بوسیله یکی

از آن دو معادله خیلی آسان است .

ب - طریقه حذف - در این طریقه ضرایب یکی از

مجهولها را در دو معادله بدو عدد قرینه تبدیل مینمائیم ، از

جمع کردن دو معادله يك معادله يك مجهولی بدست میآید

که با حل آن يك مجهول پیدا میشود . با معلوم شدن يك

مجهول پیدا کردن دیگری ساده است.

ج - طریقه قیاسی - یکی از مجهولات را بفرض معلوم بودن

مجهول دیگر در هر يك از دو معادله پیدا نموده دو مقداری را که برای

آن بدست میآید مساوی قرار میدهند. پس از حل این تساوی یکی از

مجهولات بدست میآید و با معلوم بودن يك مجهول میتوان مجهول

دیگر را از یکی از دو معادله پیدا نمود .

د - بوسیله فرمولهای کرامر - ریشه‌های دو معادله

دو مجهولی درجه اول عبارتند از :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

اگر $ab' - ba' \neq 0$ باشد معادله دارای جواب است .

۶۶ - معادله درجه دوم

ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ عبارتند از

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یا اگر $b = 2b'$ فرض شود $x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$

۱- اگر Δ (مبین) منفی باشد معادله دارای ریشه نیست.

ب - اگر Δ (مبین) مساوی صفر باشد معادله دارای

ریشه مضاعف $x = \frac{-b}{2a}$ یا $x = \frac{-b'}{a}$ است.

شرط لازم و کافی برای اینکه يك معادله درجه دوم

دارای ریشه باشد آنستکه مبین آن مثبت باشد .

۶۷ - روابط بین ضرائب و ریشه‌های معادله درجه دوم

$$x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

۱ - حاصل جمع ریشه‌ها

$$x' x'' = \frac{c}{a}$$

ب - حاصل ضرب ریشه‌ها

ج - تفاضل ریشه‌ها

$$x' - x'' = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

۶۸ - حاصل جمع قوای متشابه ریشه‌های یک معادله درجه دوم.

اگر مجموع قوای p ام ریشه‌های معادله درجه دومی را S_p فرض کنیم یعنی $S_p = x'^p + x''^p$ باشد روابط ذیل را خواهیم داشت :

$$S_1 = x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

$$S_2 = x'^2 + x''^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$S_3 = x'^3 + x''^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$aS_2 + bS_1 + 2c = 0$$

$$aS(p+2) + bS(p+1) + cS_p = 0$$

۶۹ - اگر S مجموع و P حاصل ضرب دو عدد باشد

$$x^2 - Sx + P = 0$$

آن دو عدد ریشه‌های این معادله‌اند :

۷۰ - اگر d تفاضل و p حاصل ضرب دو عدد باشد آن

$$x^2 - dx - P = 0$$

دو عدد ریشه‌های این معادله می‌باشند :

۷۱ - علامت ریشه‌های معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

۱ - اگر $\frac{c}{a} < 0$ و یا $ac < 0$ باشد x' و x''

مختلف علامه هستند .

ب - اگر $\frac{c}{a} > 0$ (یا $ac > 0$) باشد دو ریشه متجانس علامه هستند

ج - اگر $ac > 0$ یا $(\frac{c}{a} > 0)$ و $ab < 0$ و $\Delta > 0$ باشد

هر دو ریشه منفی هستند .

د - اگر $ac > 0$ (یا $\frac{c}{a} > 0$) و $ba > 0$ و $\Delta > 0$ باشد هر

دو ریشه مثبت میباشند .

برای آسان شدن بحث فرض میکنیم ریشه ای که بر حسب قدر مطلق بزرگتر است x' و ریشه دیگر x'' باشد. جدول ذیل علائم ریشه ها را مشخص میسازد :

Δ	$\frac{c}{a}$	$-\frac{b}{a}$	علامت ریشه ها
+	+	+	$x' > 0$ $x'' > 0$
+	+	-	$x' < 0$ $x'' < 0$
+	۰	+	$x' > 0$ $x'' = 0$
+	۰	-	$x' < 0$ $x'' = 0$
+	-	+	$x' > 0$ $x'' < 0$
+	-	-	$x' < 0$ $x'' > 0$
+	-	۰	$x' > 0$ $x'' < 0$ $ x' = x'' $
۰	از آن قطعاً مثبت است	+	$x' = x'' > 0$
۰		-	$x' = x'' < 0$
-			ریشه ها مو هومند

XIV - سه جمله درجه دوم

$$y = ax^2 + bx + c \quad ۷۲ - \text{سه جمله}$$

باین صورت نوشته میشود :

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

حالت اول - اگر Δ یعنی $b^2 - 4ac > 0$ باشد $y = 0$

دارای دو ریشه x' و x'' خواهد بود و سه جمله بصورت

$$y = a(x - x')(x - x'')$$

درمیآید. در اینصورت اگر به x مقادیر خارج دو ریشه داده

شود علامت سه جمله با علامت a یکی است و اگر مقداری بین

x' و x'' بدهیم علامت سه جمله مخالف علامت a است.

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \text{حالت دوم -}$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \quad \text{در اینصورت}$$

و علامت سه جمله همیشه با علامت a یکی است.

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \text{حالت سوم -}$$

$$\text{در اینصورت } y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + m^2 \right] \text{ است}$$

و باز هم علامت سه جمله همیشه با علامت a یکی است.

خلاصه - علامت سه جمله درجه دوم بازاء مقادیری که

بین ریشه‌ها باشند (در صورت وجود دو ریشه) مخالف علامت

a و بازاء سایر مقادیر همواره موافق علامت a است.

۷۳ - مقایسه عدد باریشه های سه جمله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c$$

شرط لازم و کافی برای اینکه عدد α بین ریشه ها قرار داشته باشد آنست که $af(\alpha) < 0$ باشد.

ب - شرط لازم و کافی برای اینکه عدد α کوچکتر از دو ریشه باشد :

$$\Delta > 0 \quad af(\alpha) > 0 \quad \text{و} \quad \alpha < -\frac{b}{2a} \text{ یا } \alpha + \frac{b}{2a} < 0$$

ج - شرط لازم و کافی برای اینکه α بزرگتر از دو ریشه باشد :

$$\Delta > 0 \quad af(\alpha) > 0 \quad \alpha > -\frac{b}{2a} \text{ یا } \alpha + \frac{b}{2a} > 0$$

۷۴ - مقایسه دو عدد α و β باریشه های سه جمله

$$ax^2 + bx + c$$

(برای آسان شدن نخست α را از β و x'' را از x' کوچکتر فرض میکنیم). هرگاه :

$$\begin{array}{lll} af(\alpha) > 0 & \text{و} & f(\alpha)f(\beta) < 0 \\ af(\beta) > 0 & \text{و} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \alpha < \beta < -\frac{b}{2a} & \Delta > 0 & f(\alpha)f(\beta) > 0 \\ \alpha < \beta < x'' < x' & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -\frac{b}{2a} < \alpha < \beta & \text{و} & x'' < x' < \alpha < \beta \\ \text{و} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x'' < \alpha < \beta < x' & af(\alpha) < 0 & f(\alpha)f(\beta) > 0 \end{array}$$

۷۵ - مقایسه ریشه های دو سه جمله

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های سه جمله $f(x) = ax^2 + bx + c$

و x'_1 و x'_2 ریشه‌های سه جمله $f_1(x) = a'x^2 + b'x + c'$ باشند :

شرط لازم و کافی برای اینکه دو سه جمله دارای يك ریشه مشترك باشند :

$$R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0$$

اگر $R = 0$ و $ab' - ba' \neq 0$ باشد ریشه مشترك عبارتست از

$$x = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

اگر $R \neq 0$ باشد دو سه جمله دارای ریشه مشترك نیستند.

ب- شرط لازم و کافی برای اینکه دو سه جمله دارای دو ریشه مشترك باشند آنستکه

$$\Delta > 0 \text{ و } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ باشد}$$

ج- شرط لازم و کافی برای اینکه يك ریشه یکی از سه جمله‌ها مابین ریشه‌های سه جمله دیگر واقع باشد آنستکه $R < 0$ باشد بعلاوه :

$$x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2 \text{ ، } -\frac{b}{2a} < -\frac{b'}{2a'} \text{ و } R < 0 \text{ اگر}$$

$$x'_1 < x_1 < x'_2 < x_2 \text{ ، } -\frac{b}{2a} > -\frac{b'}{2a'} \text{ و } R < 0 \text{ اگر}$$

xv معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم

۷۶ - معادله دو مجذوری $ax^2 + bx^2 + c = 0$

۱ - شرط کافی برای اینکه این معادله دارای دو

ریشه باشد آنستکه $\frac{c}{a} < 0$ یا $ac < 0$ باشد و دو ریشه آن

عبارتند از :

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

۲ - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله فوق دارای چهار

ریشه مشخص باشد آنستکه :

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \quad -\frac{b}{a} > 0 \quad \frac{c}{a} > 0$$

۳ - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله دو مجذوری

دارای ریشه مضاعف باشد این است که

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad -\frac{b}{a} > 0$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

۴ - اگر $c = 0$ باشد دو تا از ریشه‌های معادله فوقصفر می‌باشند و دو ریشه دیگر $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$ خواهند بود اگر

$$-\frac{b}{a} > 0 \text{ باشد.}$$

۷۷ معادلات معکوسه

تعریف -- معادله را معکوسه گویند در صورتیکه

ریشه‌های آن عکس یکدیگر باشند مثلاً اگر a یکی از

ریشه‌های معادله معکوسه درجه دوم باشد ریشه دیگر آن $\frac{1}{a}$ خواهد بود.

در معادلات معکوسه ضرایب جمله هائیکه از وسط معادله بیک فاصله باشند مساوی هستند.

۷۸ - حل معادلات معکوسه -

معادله معکوسه‌ای که بزرگترین درجه مجهول آن فرد باشد بر $x \pm 1$ قابل قسمت است بنابراین ± 1 یکی از ریشه‌های آن است و برای پیدا کردن سایر ریشه‌ها معادله را بر $x \pm 1$ تقسیم نموده ریشه خارج قسمت را مطابق قواعد پیش پیدا میکنیم.
ب - معادلات معکوسه‌ای که درجه آنها زوج باشد - برای نمونه معادله درجه چهارم معکوسه زیر را حل میکنیم :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

طرفین معادله را بر x^2 تقسیم میکنیم

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

از ضرایب مساوی فاکتور میگیریم :

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

فرض میکنیم $x + \frac{1}{x} = y$ آنوقت $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

و معادله بصورت زیر در میآید

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

$$ay^2 + by + c - 2a = 0$$

برای حل و بحث بشماره ۶۶ مراجعه شود .

۷۹ - معادلات معکوسه درجه سوم

۱ - معادله نوع اول معکوسه درجه سوم

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

دارای يك ریشه $x = -1$ است و ریشه های ديگرش ریشه های

معادله درجه دوم $ax^2 + (b-a)x + a = 0$ میباشد

۲ - معادله نوع دوم

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$$

دارای يك ریشه $x = 1$ است و ریشه های ديگر آن ریشه های معادله

درجه دوم $ax^2 + (a+b)x + a = 0$ میباشد

۸۰ - معادله معکوسه درجه چهارم

$$1 - \text{نوع اول} \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

اگر y' و y'' ریشه های معادله درجه دوم $ay^2 + by + c - 2a = 0$

باشد (۷۸) ریشه معادله معکوسه عبارتند از ریشه های معادله

$$x^2 - y'x + 1 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 - y''x + 1 = 0$$

۲ - نوع دوم

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$$

ریشه های این معادله عبارتند از: $x = \pm 1$ و ریشه های معادله

$$ax^2 + bx + a = 0$$

۸۱ - معادله معکوسه درجه پنجم

۱ - نوع اول

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

دارای يك ریشه $x = -1$ است و ریشه های ديگر آن ریشه های

معادله معکوسه درجه چهارم ذیل است:

$$ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b+a)x^2 + (b-a)x + a = 0$$

ب - نوع دوم

$$x^5 + xx^4 - cx^3 - bx - a = 0$$

که دارای يك ریشه $x = 1$ میباشد و ریشه های دیگر آن ریشه های معادله درجه چهارم

$$ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (a+b)x + a = 0$$

۸۲ معادلات اصم - برای حل معادلات اصم طرفین معادله را آنقدر بقوه میرسانیم تا معادله منطقی بدست آید، بعد معادله حاصل را بر طبق قواعد فوق حل میکنیم.

مثال

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} = \sqrt{x+15}$$

طرفین را بقوه ۲ میرسانیم :

$$x-1 + x-6 + 2\sqrt{x^2-7x+6} = x+15$$

و یا

$$2\sqrt{x^2-7x+6} = 22-x$$

باز طرفین را بقوه ۲ میرسانیم

$$4(x^2-7x+6) = 484 - 44x + x^2$$

$$3x^2 + 16x - 460 = 0$$

$$x = 1 \quad x = -\frac{46}{3}$$

۸۳ - تبصره ۵ - چون طرفین معادله را بقوه برسانیم

ممکن است ریشه های اضافی پیدا شود. در مثال فوق $-\frac{46}{3}$ ریشه

اضافی و غیر قابل قبول است.

XVI نامساوی

۸۴- تعریف - اگر دو عبارت با هم مساوی نباشند یکی از دیگری کوچکتر است یا بزرگتر؛ اگر کوچکتر باشد با این علامت $<$ و اگر بزرگتر است با این علامت $>$ نمایش میدهند و آنرا نامساوی میگویند.

۸۵- خواص نامساوی

۱- اگر در طرفین نامساوی دو عدد مساوی اضافه یا کم کنیم در نامساوی تغییری حاصل نمی شود.

ب- اگر طرفین نامساوی را در عدد مثبتی ضرب یا بر یک عدد مثبت تقسیم کنیم در نامساوی تغییری حاصل نمیشود.

ج- اگر طرفین نامساوی را در یک عدد منفی ضرب یا بر یک عدد منفی تقسیم نمائیم جهت آن تغییر میکند.

د- اگر طرفین نامساوی را بقوه فرد برسانیم در آن تغییری پیدا نمی شود.

ه- اگر طرفین یک نامساوی را که هر دو مثبت باشند بقوه زوج برسانیم در نامساوی تغییری پیدا نمیشود.

و- اگر طرفین یک نامساوی را که هر دو منفی باشند بقوه زوج برسانیم جهت نامساوی تغییر میکند.

۸۶- نامساوی درجه اول یک مجهولی پس از

اختصار بصورت $ax > b$ نوشته میشود.

اگر $a > 0$ باشد جوابهای نامساوی عبارتند از

$$x > \frac{b}{a}$$

اگر $a < 0$ » » » » » »

$$x < \frac{b}{a}$$

۷۸ - نامساوی درجه دوم $ax^2 + bx + c > 0$.
اولاً، اگر $\Delta < 0$ باشد،

۱ - در صورتیکه $a > 0$ باشد نامساوی بازاء جميع مقادير

x محقق است

ب - در صورتیکه $a < 0$ باشد نامساوی غير ممکن است.

ثانياً، اگر $\Delta = 0$ باشد:

۱ - در صورتیکه $a > 0$ باشد نامساوی بازاء جميع

مقادير x محقق است مگر بازاء $x = -\frac{b}{2a}$ که صفر ميشود

ب - در صورتیکه $a < 0$ باشد نامساوی غير ممکن است:

ثالثاً، اگر $\Delta > 0$ باشد

۱ - در صورتیکه $a > 0$ و $x' < x''$ باشند بازاء مقاديري

کوچکتر از x' یا بزرگتر از x'' نامساوی محقق است

ب - در صورتیکه $a < 0$ باشد

نامساوی بازاء مقادير مابين x' و x'' محقق است

$$x' < x < x''$$

۸۸ - نامساویهای درجه m ام

برای حل نامساویهای درجه m ام آنها را بحاصل ضرب

عوامل تجزیه نموده بعداً علامت هریک از عوامل را پیدا کرده

در جدولی ثبت میکنیم و از روی جدول نتیجه مطلوب را پیدامینمائیم

مثال - نامساوی ذیل را حل نمائید

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12 > 0$$

آنها بحاصل ضرب عوامل تجزیه میکنیم:

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x-4) > 0$$

x	$-\infty$	1	3	4	$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	$+$
$x-3$		$-$	$-$	0	$+$
$x-4$		$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$

ریشه های نامساوی عبارتند از $1 < x < 3$ و $x > 4$

۸۹ - نامساوی کسری

برای حل نامساویهای کسری صورت و مخرج را در مخرج ضرب میکنیم و علامت صورت کسر حاصل را پیدا مینمائیم.

XVII تصاعد حسابی

۹۰ - تعریف - تصاعد حسابی رشته اعدادی است که تفاضل هر دو جمله پیاپی آن مقدار ثابتی باشد و آن مقدار ثابت را قدر نسبت تصاعد مینامند.

۹۱ - اگر در تصاعدی هر جمله از جمله قبل از آن بزرگتر باشد تصاعد صعودی و الا نزولی است. در حالت اول قدر نسبت عددی است مثبت و در حالت دوم عددی منفی است.

۹۲ - اگر در تصاعد حسابی a جمله اول و l جمله n ام و r قدر نسبت باشد :

$$l = a + (n-1)r$$

ب - S حاصل جمع n جمله اول : $S = \frac{n(a+1)}{2}$

ج - اگر p واسطه حسابی بین دو جمله متوالی يك تصاعد حسابی درج کنیم r' قدر نسبت تصاعد درج شده عبارتست از :

$$r' = \frac{r}{p+1}$$

۹۳ - در تصاعد حسابی محدود که عده جمل زوج باشد مجموع هر دو جمله متساوی البعد از طرفین مقدار یست ثابت و مساویست با مجموع دو جمله اول و آخر و اگر عده جمل فرد باشد مقدار جمله وسط مساوی است با واسطه عددی هر دو جمله متساوی البعد از طرفین .

۹۴ - دستوره‌های مختلف :

۱ - حاصل جمع n عدد متوالی از سلسله اعداد طبیعی که از واحد شروع شود عبارتست از :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

ب - حاصل جمع n عدد زوج متوالی در سلسله طبیعی اعداد عبارتست از :

$$S = n(n+1)$$

ج - مقدار عدد n ام اعداد فرد از سلسله طبیعی اعداد عبارتست از :

$$l = 2n - 1$$

د - حاصل جمع n عدد از اعداد فرد سلسله طبیعی اعداد عبارتست از :

$$S = n^2$$

ه - حاصل جمع مربعات n عدد متوالی از سلسله طبیعی

اعداد که از واحد شروع شود عبارتست از :

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

و - حاصل جمع مکعبات n عدد متوالی از سلسله

اعداد طبیعی که از واحد شروع شود عبارتست از :

$$S = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

XVIII تصاعد هندسی

۹۵- تعریف - تصاعد هندسی رشته اعدادیست که خارج

قسمت هر دو جمله پیاپی آن مقدار ثابتی باشد این مقدار ثابت را قدرنسبت تصاعد هندسی گویند .

۹۶- هر گاه هر جمله از تصاعد از جمله قبل از آن بزرگتر

باشد تصاعد صعودی والا نزولی است. در حالت اول قدرنسبت بزرگتر از واحد و در حالت دوم کوچکتر از واحد است .

۹۷- اگر در تصاعدی هندسی a جمله اول ، l جمله n ام

و q قدرنسبت باشد :

ا - مقدار جمله n ام : $l = aq^{n-1}$

ب - S حاصل جمع جمله n اول تصاعد :

$$S = \frac{lq - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

ج - p حاصل ضرب n جمله اول تصاعد :

$$p = \sqrt[n]{al}$$

د - اگر p واسطه هندسی بین دو جمله متوالی يك تصاعد هندسی درج کنیم q' قدر نسبت تصاعد درج شده عبارتست از :

$$q' = \sqrt[q+1]{q}$$

ه - حد مجموع جمل يك تصاعد هندسی نزولی وقتی که عده جمل بینهایت زیاد شود :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

۹۸ - در تصاعد هندسی محدود که عده جمل زوج باشد حاصل ضرب هر دو جمله متساوی البعد از طرفین مقدار یست ثابت و مساویست با حاصل ضرب دو جمله اول و آخر و اگر عده جمل فرد باشد مقدار جمله وسط مساوی است با جند حاصل ضرب (واسطه هندسی) هر دو جمله متساوی البعد از طرفین

XIX - لگاریتم

۹۹ - تعریفی - دو تصاعد نامحدود، یکی هندسی که جمله اولش يك و قدر نسبت آن q و دومی حسابی که جمله اولش صفر و قدر نسبت آن r باشد، فرض نموده و آنها را جمله به جمله بطوری زیر هم مینویسیم که صفر تصاعد حسابی زیر يك از تصاعد هندسی قرار گیرد، باین طریق :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddots : q^{-m} : \dots : q^{-2} : q^{-1} : 1 : q : q^2 : \dots : q^m : \ddots \\ \vdots : \dots : -mr : \dots : -2r : -r : 0 : r : 2r : \dots : mr : \dots \end{array} \right.$$

دورشته تصاعدی که بطریق بالا نوشته شده باشند

دستگاه لگاریتم را تشکیل میدهند و در آن هر جمله از تصاعد
عددی لگاریتم (\log) جمله نظیرش از تصاعد هندسی و هر
جمله از تصاعد هندسی عدد مابازاء یا آنتی لگاریتم جمله
نظیرش از تصاعد عددی است؛ مثلاً :

$$\log q^r = r$$

$$q^r = \text{عدد مابازاء}$$

و

۱۰۰- با توجه باینکه $q^{-1} = \frac{1}{q}$ ، چون جمله های تصاعد

هندسی همیشه مثبت اند پس فقط اعداد مثبت دارای لگاریتم
هستند و اعداد کوچکتر از واحد دارای لگاریتم منفی میباشند
همچنین $\log 0 = -\infty$ و $\log \infty = \infty$ و همیشه $\log 1 = 0$

۱۰۱- در هر دستگاه لگاریتم عددی را که لگاریتم آن يك

است مبنای آن دستگاه مینامند .

۱۰۲- لگاریتم عدد A در دستگاهی بمبنای a عددیست مانند

x که چون مبنای a را بقوه آن برسانیم حاصل مساوی A
گردد یعنی :

$$x = \log_a A$$

$$\text{اگر } a^x = A$$

۱۰۳- اگر A و a مثبت باشند همیشه برای x مقداری، که

غالباً اصم خواهد بود، بدست میآید

۱۰۴- هرگاه $A = a$ فرض شود $x = 1$ میشود یعنی لگاریتم

مبنا همیشه مساوی يك است (نمره ۱۰۰)

خواص لگاریتم

۱۰۵- لگاریتم حاصل ضرب چند عدد مثبت مساوی است

با مجموع لگاریتم‌های آن اعداد :

$$\log abc = \log a + \log b + \log c$$

۱۰۶- لگاریتم خارج قسمت دو عدد مثبت مساوی است با

تفاضل لگاریتم صورت و مخرج :

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

۱۰۷- لگاریتم عکس هر عدد مساویست با لگاریتم آن عدد

با علامت مخالف و آنرا کل لگاریتم (Cologarithme) آن عدد

نامند یعنی :

$$\log \frac{1}{b} = -\log b = \text{colog } b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a + \text{colog } b \quad \text{پس}$$

۱۰۸- لگاریتم قوه m ام هر عدد مساویست با m برابر

لگاریتم آن :

$$\log a^m = m \log a$$

۱۰۹- لگاریتم ریشه m ام هر عدد مساویست با $\frac{1}{m}$ لگاریتم

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a$$

آن عدد

لگاریتم اعشاری یا لگاریتم (Vulgaires) :

۱۱۰- در دستگاه لگاریتم اعشاری مبنا ده و قدر نسبت

تصاعد عددی يك و قدر نسبت تصاعد هندسی ده میباشد باین طریق :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots : 10^4 : 10^3 : 10^2 : 10^1 : 10^0 : 10^{-1} : 10^{-2} : \dots \\ \dots : 2 : 1 : 0 : 1 : 2 : \dots \end{array} \right.$$

۱۱۱ - لگاریتم اعدادی که محصور بین قوای متوالیه ۱۰ باشند دارای يك جزء صحیح بنام مفسر و يك جزء اعشاری بنام مانتهیس میباشد

۱۱۲ - اگر عددی را در یکی از قوای ۱۰ ضرب و یا بر آن تقسیم نمائیم در جزء اعشاری لگاریتم آن تغییری حاصل نمیشود ولی عددی مساوی نماینده آن قوه به مفسر اضافه یا از آن کم میشود :

$$\log(A \cdot 10^m) = \log A + \log 10^m = \log A + m$$

$$\log\left(\frac{A}{10^m}\right) = \log A - \log 10^m = \log A - m$$

۱۱۳ - مفسر لگاریتم هر عدد بزرگتر از واحد عددی است مساوی عده ارقام صحیح همان عدد منهای يك .

۱۱۴ - چون لگاریتم اعداد کوچکتر از واحد منفی است معمولاً آنرا بطریق زیر تبدیل به مانتهیس مثبت و مفسر منفی مینمایند :

فرض میکنیم $\log A = -2.75241$ باشد آنرا

بترتیب چنین مینویسیم :

$$\begin{aligned} \log A &= -2.75241 = -2 - 1 + 1 - 0.75241 \\ &= (-2 - 1) + (1 - 0.75241) \\ &= -3 + 0.24759 \end{aligned}$$

و در موقع نوشتن برای اینکه نمایش دهند فقط مفسر منفی است علامت - را بالای مفسر میگذارند، باینطریق :

$$\log A = \overline{3}.24759$$

تبصره - کل لگاریتم اعداد را نیز بطریق بالا تبدیل

بمفسر منفی و مانتیس مثبت مینمایند.

مفسر منفی اعداد کوچکتر از واحد برابر است با تعداد صفرهایی که در طرف چپ اولین رقم با معنای آن عدد قرار دارد.

۱۱۵- اگر لگاریتمهای اعداد در دستگاهی بمبنای a در دست باشند و بخواهیم لگاریتمهای آنها را در دستگاهی بمبنای b بدست آوریم باید لگاریتمهای آنها را که بمبنای a است در

مقدار ثابت $\log_a b$ (عکس لگاریتم b در دستگاه بمبنای a)

ضرب کنیم (مقدار ثابت $\log_a b$ را مدول module گویند)

چهار عمل اصلی در لگاریتم

۱۱۶- در جمع لگاریتمها مانتیسها را باهم جمع نموده و مفسرها را جمع جبری مینمائیم.

۱۱۷- در تفریق لگاریتمها بجای مفروق کلا لگاریتم عدد را مینویسیم و عمل تفریق بجمع مبدل میشود.

۱۱۸- در ضرب عدد صحیح در لگاریتم عدد بزرگتر از يك مانند ضرب اعداد اعشاری عمل مینمائیم.

۱۱۹- برای ضرب عدد درست در لگاریتم عدد کوچکتر از يك چون لگاریتم عدد کوچکتر از يك مرکب از مفسر منفی مانتیس مثبت است عدد درست را در مانتیس ضرب نموده و بین جزء صحیح حاصل با حاصل ضرب آن عدد در مفسر منفی جمع جبری بجا میآوریم.

۱۲۰- در تقسیم لگاریتم عدد بزرگتر از يك در عدد صحیح مانند تقسیم اعداد اعشاری بر عدد صحیح عمل مینمائیم.

۱۲۱- در تقسیم لگاریتم عدد کوچکتر از يك بر عدد صحیح

دو حالت اتفاق میافتد .

۱ - مفسر منفی بتنهائی بر مقسوم علیه قابل قسمت است ،
در این صورت مفسر و ماننثیس را جدا جدا بر مقسوم علیه تقسیم
نموده خارج قسمت را بصورت لگاریتم عدد کوچکتر از يك
مینویسیم .

$$\begin{aligned} \text{مثال: } 872424 : 4 &= -\frac{8}{4} + \frac{0.72424}{4} \\ &= -2 + 0.18106 \\ &= \overline{4}18106 \end{aligned}$$

۲ - مفسر منفی به تنهائی بر مقسوم علیه قابل قسمت نیست ،
در اینحال آنقدر واحد منفی بمفسر منفی می افزائیم تا قابل
قسمت شود و بهمین اندازه هم واحد مثبت بماننثیس مثبت اضافه
میکنیم تا در لگاریتم تغییری حاصل نگردد بعد مانند حالت قبل
عمل مینمائیم :

$$\begin{aligned} \text{مثال: } 3/72635 : 5 &= \frac{-3 + 0.72635}{5} \\ &= \frac{-3 - 2 + 2 + 0.72635}{5} \\ &= \frac{-5 + 0.72635}{5} = -\frac{5}{5} + \frac{0.72635}{5} \\ &= -1 + 0.14527 = \overline{1}14527 \end{aligned}$$

۱۲۲ - در تقسیم لگاریتم بر لگاریتم نیز دو حالت اتفاق میافتد :

۱ - اگر مقسوم و مقسوم علیه هر دو لگاریتم مثبتند مانند

تقسیم دو عدد اعشاری عمل مینمائیم .

۲ - اگر مقسوم و مقسوم علیه یا یکی از آنها منفی است

بجای آن کل لگاریتم میگذاریم و مانند حالت قبل عمل مینمائیم .

جدولهای لگاریتم

۱۲۳ - جدولهای لگاریتم جدولهای است که بكمك آنها میتوان لگاریتمهای اعداد را بدست آورد، یا عددهائی را که لگاریتمهایشان در دست است پیدا نمود. چون تعیین مفسر لگاریتم آسان است در جداول فقط مانتیس لگاریتم اعداد را ثبت کرده اند.

۱۲۴ - جدولهای لگاریتم بر دو قسم اند:

۱ - جدولهای بزرگ که در آنها لگاریتم اعداد تا هفت رقم اعشار داده شده است.

۲ - جدولهای کوچک که در آنها لگاریتم اعداد از ۱ تا ۱۰۰۰ با پنج رقم اعشار نوشته شده است.

در محاسبات عادی میتوان از جدولهای کوچک استفاده نمود و نتیجه محاسبه را با تقریب کافی بدست آورد. از جدولهای کوچک که بیشتر مورد استفاده دانش آموزان است. جدول دویوئی است که ترجمه فارسی آن نیز از طرف وزارت فرهنگ چاپ شده. طرز استفاده از جداول در هر يك از آنها نوشته شده است.

۱۳۵ - ملدر جدول صفحه ۷۷ مانتیس لگاریتم عددهای

از ۱ تا ۱۰۰ را درج میکنیم.

لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد
۹۰۸۴۹	۸۱	۷۸۵۳۳	۶۱	۶۱۲۷۸	۴۱	۳۲۲۲۲	۲۱	۰۰۰۰۰	۰۱
۹۱۳۸۱	۲	۷۹۲۳۹	۲	۶۲۳۲۵	۲	۳۴۲۴۲	۲	۳۰۱۰۳	۲
۹۱۹۰۸	۳	۷۹۹۳۴	۳	۶۳۳۴۷	۳	۳۶۱۷۳	۳	۴۷۷۱۲	۳
۹۲۴۲۸	۴	۸۰۶۱۸	۴	۶۴۳۴۵	۴	۳۸۰۲۱	۴	۶۰۲۰۶	۴
۹۲۹۴۲	۵	۸۱۲۹۱	۵	۶۵۳۲۱	۵	۲۹۷۹۴	۵	۶۹۸۹۷	۵
۹۳۴۵۰	۶	۸۱۹۵۴	۶	۶۶۲۷۶	۶	۴۱۴۹۷	۶	۷۷۸۱۵	۶
۹۳۹۵۲	۷	۸۲۶۰۷	۷	۶۷۲۱۰	۷	۴۳۱۳۶	۷	۸۴۵۱۰	۷
۹۴۴۴۸	۸	۸۳۲۵۱	۸	۶۸۱۲۴	۸	۴۴۷۱۶	۸	۹۰۳۰۹	۸
۹۴۹۳۹	۹	۸۳۸۸۵	۹	۶۹۰۲۰	۹	۴۶۲۴۰	۹	۹۵۴۲۴	۹
۹۵۹۰۴	۹۱	۸۵۱۲۶	۷۱	۷۰۷۵۷	۵۱	۴۹۱۳۶	۳۱	۰۴۱۳۹	۱۱
۹۶۳۷۹	۲	۸۵۷۳۳	۲	۷۱۶۰۰	۲	۵۰۵۱۵	۲	۰۷۹۱۸	۲
۹۶۸۴۸	۳	۸۶۳۳۲	۳	۷۲۴۲۸	۳	۵۱۸۵۱	۳	۱۱۳۹۴	۳
۹۷۳۱۳	۴	۸۶۹۲۳	۴	۷۳۲۳۹	۴	۵۳۱۴۸	۴	۱۴۶۱۳	۴
۹۷۷۷۲	۵	۸۷۵۰۶	۵	۷۴۰۳۶	۵	۵۴۴۰۷	۵	۱۷۶۰۹	۵
۹۸۲۲۷	۶	۸۸۰۸۱	۶	۷۴۸۱۹	۶	۵۵۶۳۰	۶	۲۰۴۱۲	۶
۹۸۶۷۷	۷	۸۸۶۴۹	۷	۷۵۵۸۷	۷	۵۶۸۲۰	۷	۲۳۰۴۵	۷
۹۹۱۲۳	۸	۸۹۲۰۹	۸	۷۶۳۴۳	۸	۵۷۹۷۸	۸	۲۵۵۲۷	۸
۹۹۵۶۴	۹	۸۹۷۶۳	۹	۷۷۰۸۵	۹	۵۹۱۰۶	۹	۲۷۸۷۵	۹

XX - ربح مرکب

۱۲۶ - تعریف - اگر مبلغی را با نرخ معینی بمراتبه

بگذاریم و در آخر هر سال سود آنرا بسرمایه افزوده سرمایه سال بعد قرار دهیم گوئیم آن مبلغ بربح مرکب داده شده است

۱۲۷ - در ربح مرکب معمولاً نرخ عبارتست از سود یک

ریال در یک سال

۱۲۸ - اگر a سرمایه و r نرخ و A مجموع سرمایه و

سود پس از n سال باشد.

$$A = a(1+r)^n \quad (۱)$$

$$\log A = \log a + n \log(1+r) \quad (۲)$$

از فرمول (۲) میتوان فرمولهای زیر را بدست آورد:

$$۱) \quad \log a = \log A - n \log(1+r)$$

$$۲) \quad n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}$$

$$۳) \quad \log(1+r) = \frac{\log A - \log a}{n}$$

فرمول (۲) در مواردیکه مدت صحیح یا کسری باشد

استعمال میشود.

XXI قسط السنین

۱۲۹ - تعریف - قسط السنه مبلغ پولی است که کسی

برای تشکیل سرمایه یا پرداخت قرض مرتباً در اول یا آخر هر

سال در مدت چند سال میپردازد *

۱۳۰ - قسط السنین برای تشکیل سرمایه

فرض میکنیم a ریال مبلغی باشد که در اول هر سال پرداخته میشود و r سود سالانه یکریال در یکسال و A ریال مبلغ آخری که در آخر سال n ام بدست میآید باشد در این صورت :

$$A = a(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$a = \frac{Ar}{1+r} \cdot \frac{1}{(1+r)^n - 1}$$

۱۳۱ - تبصره - محاسبه r یا n از روی سه عامل معلوم

دیگر بتقریب بکمک جدولهای عددی مخصوص بدست میآید *

۱۳۲ - قسط السنین برای استهلاک دین

- اگر A ریال مبلغ دریافتی و a ریال مبلغ قسط

پرداختی در آخر هر سال و n عده اقساط و r سود سالانه یک ریال باشد *

$$a = Ar \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

مبلغ استهلاک α_1 در آخر سال اول عبارت خواهد بود

$\alpha_1 = a - Ar$ و مبلغ استهلاک α_p و در آخر سال p ام

عبارتست از :

$$\alpha_p = \alpha_1 (1+r)^{p-1} = (a - Ar)(1+r)^{p-1}$$

XXII نمایش هندسی

۱۳۳ - تعریف - برای اینکه نقطه M را بموازات امتداد Δ بر خط D تصویر کنیم از M خطی موازی Δ میکشیم تا D را قطع کند. تصویر نقطه N بموازات صفحه p بر خط Δ محل تلاقی Δ با صفحه ایست که از N بموازات p رسم شود.

۱۳۴ محور - مبدأ - مختصات - هرگاه از روی خط نامحدود $X'X$ جهتی مثلاً از چپ بر راست، را مثبت اختیار کنیم آن خط تشکیل يك محور میدهد. نقطه ثابت O واقع بر محور را که نقاط دیگر محور بوسیله فاصله شان از آن مشخص میگرددند مبدأ میگویند.

خطی را که از مبدأ يك نقطه غیر واقع بر محور وصل کنند شعاع حامل آن نقطه نامند،

برای معین ساختن جای هر نقطه بر روی خط، صفحه یا فضا مشخصاتی لازمست که آنها را مختصات گویند.

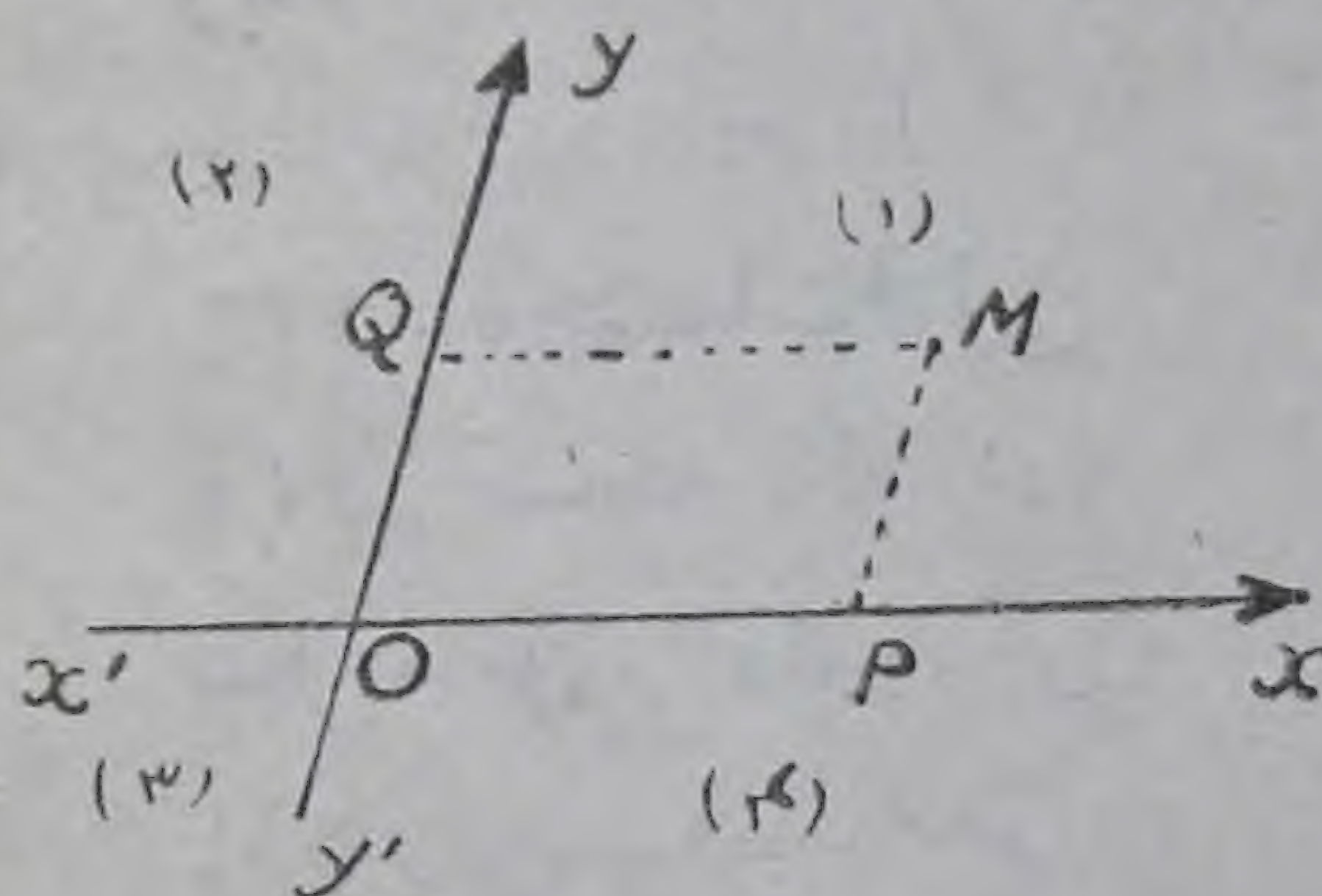
فاصله هر نقطه واقع بر محور را از مبدأ طول یا ابعاس آن نقطه نامند. طول نقطه برای مشخص ساختن هر نقطه واقع بر محور کافیست.

هر نقطه صفحه ممکن است بوسیله تصاویرش بر دو محور متقاطع (مختصات دکارتی) یا بكمك طول شعاع حامل و زاویه این شعاع با محور (مختصات قطبی) مشخص شود.

هر نقطه در فضا بوسیله تصاویرش بر سه محور متقاربت غیر واقع در يك صفحه (مختصات دکارتی) یا با شعاع حامل و زاویه

این شعاع با يك صفحه که بر مبداء میگذرد و زاویه تصویر شعاع حامل بر روی این صفحه با محوری که بر مبداء مرور نماید (مختصات قطبی) معین میگردد.

۱۳۵- مختصات دکارتی - (۱) در صفحه - دو محور

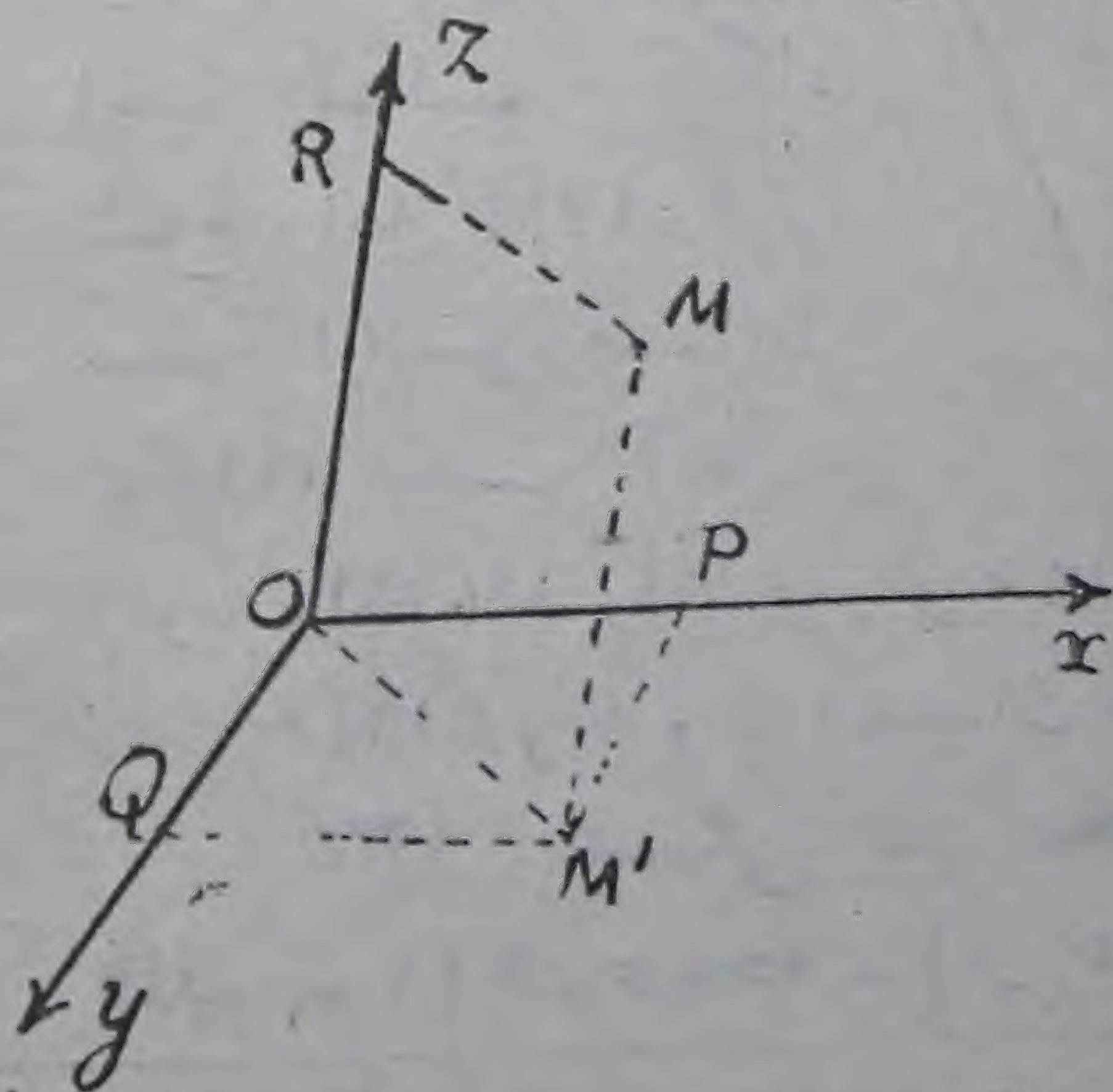


مقاطع ox, oy اختیار میکنیم و نقطه M را بموازات ox بر oy و بموازات oy بر ox تصویر میکنیم تا P و Q بدست آید. OP را طول یا آبسیسی و OQ را عرض یا (Ordonnée) نقطه M میگویند.

شکل ۱

دو محور نا محدود ox و oy صفحه را بچهار ناحیه تقسیم میکنند (ش ۱) در ناحیه ۱ هر دو مختص مثبت، در ناحیه ۲ طول منفی و عرض مثبت، در ناحیه ۳ هر دو منفی و در ناحیه ۴ طول مثبت و عرض منفی میباشد.

(۲) در فضا - نقطه M را بر هر يك از سه محور ox, oy, oz به موازات صفحه‌ای که بر دو محور دیگر میگذرد تصویر میکنیم تا P و Q و R بدست آیند (ش ۲) OP و OQ و OR را بترتیب طول و عرض و



شکل ۲

ارتفاع (بلندی یا Cote) نقطه M میگویند.

تبصره - معمولاً محورهای مختصات را عمود برهم اختیار

میکنند و مختصات را قائم مینامند.

ما از این پس فقط از مختصات دکارتی قائم صحبت خواهیم کرد.

قرار داد - در خواندن مختصات ابتدا طول، بعد عرض

و بعد از آن ارتفاع نقطه را میخوانیم و بهمین ترتیب از چپ

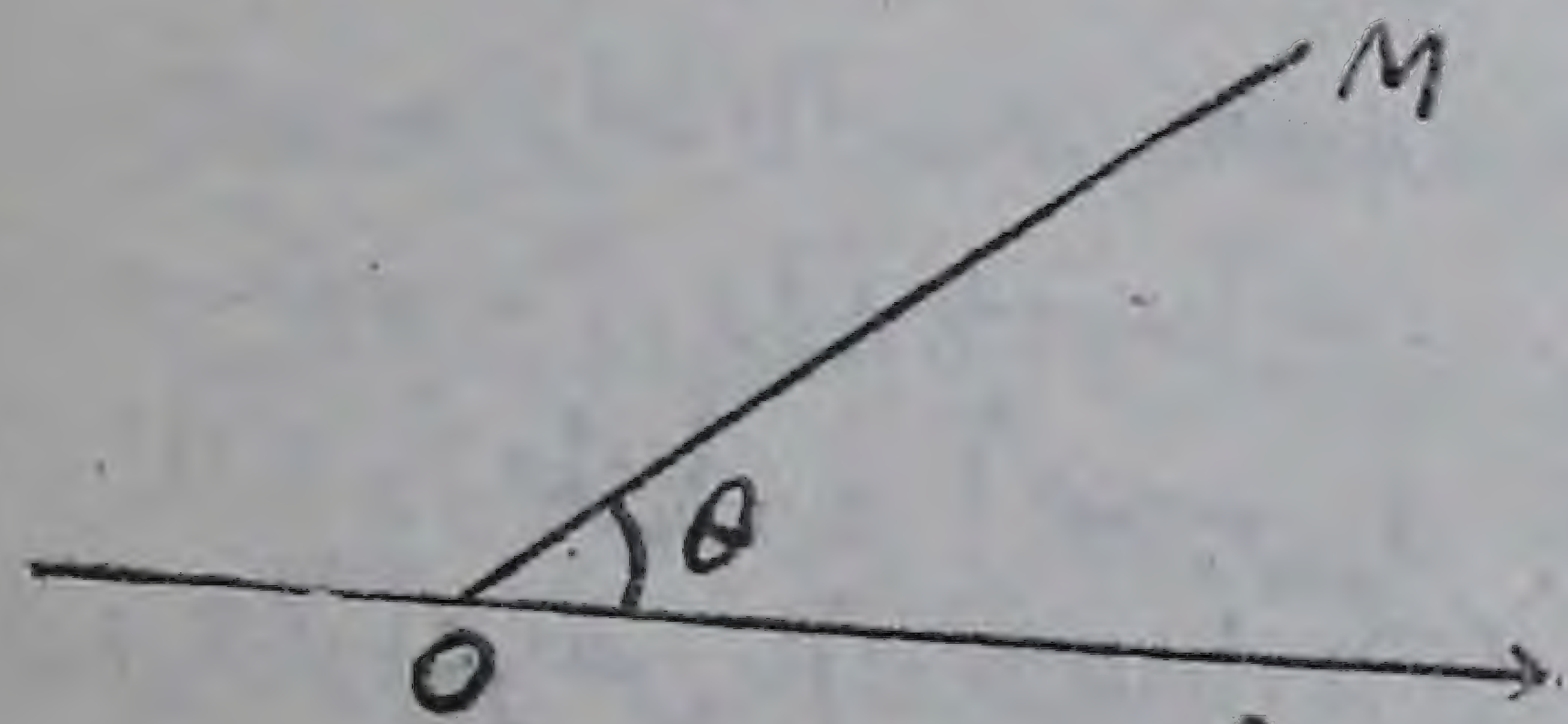
بر است مینویسیم: $M(x, y, z)$

۱۳۶ - مختصات قطبی

(۱) در صفحه - OM را

شعاع حامل و θ زاویه بین

OM و جهت مثبت محور



شکل ۳

را مدول مینامند. شعاع حامل را به r (۱)

نمایش میدهند (ش ۳)

(۲) در فضا - در صفحه

(P) که بر مبدأ O

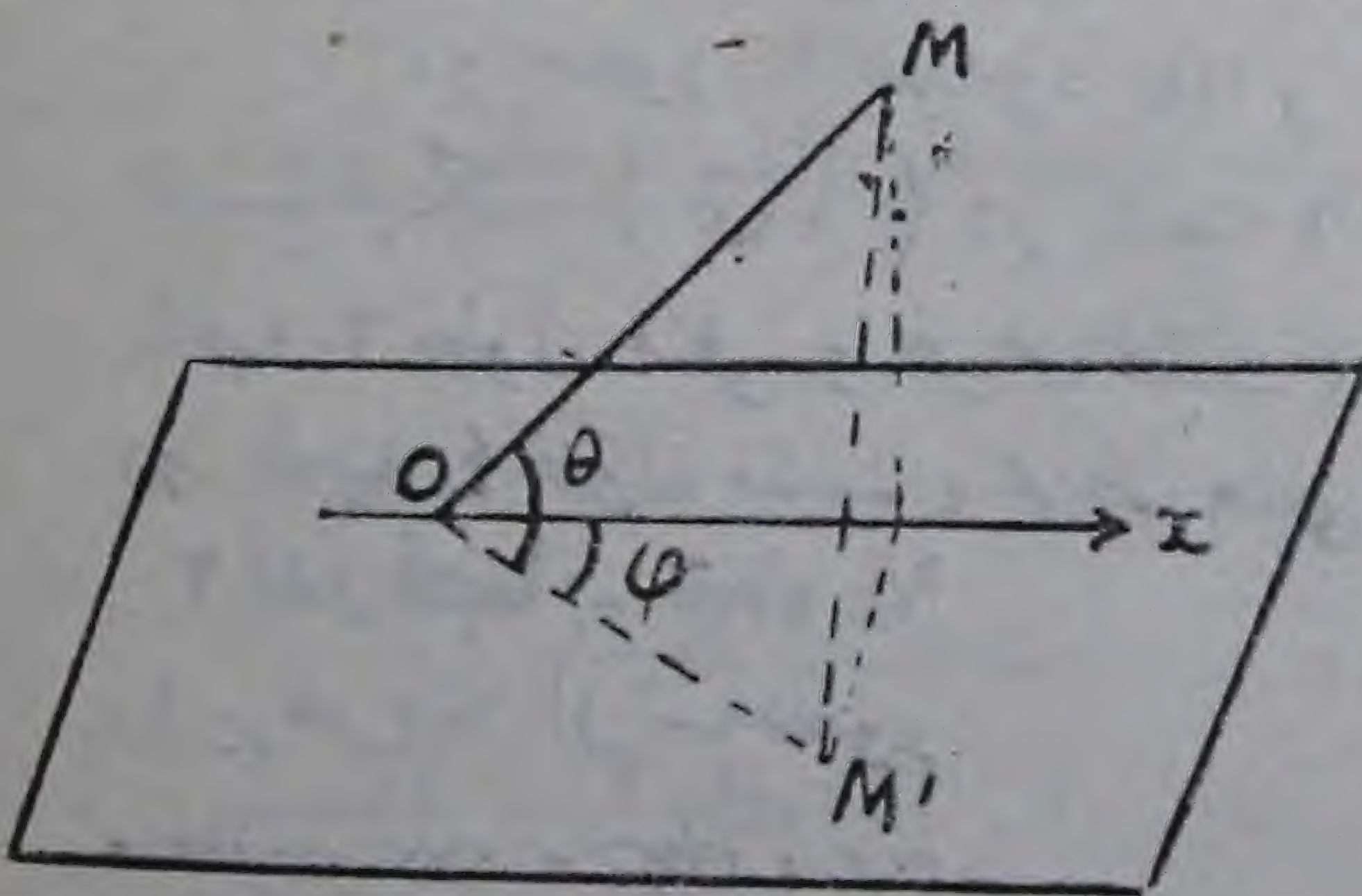
میگذرد محور Ox را

اختیار میکنیم. آنگاه

شعاع حامل OM را بر

صفحه (P) تصویر مینمائیم

تا OM' بدست آید



شکل ۴

زاویه MOM' را θ و زاویه $M'Ox$ را φ مینامیم.

$OM = r$ و θ و φ مختصات قطبی نقطه M هستند (ش ۴)

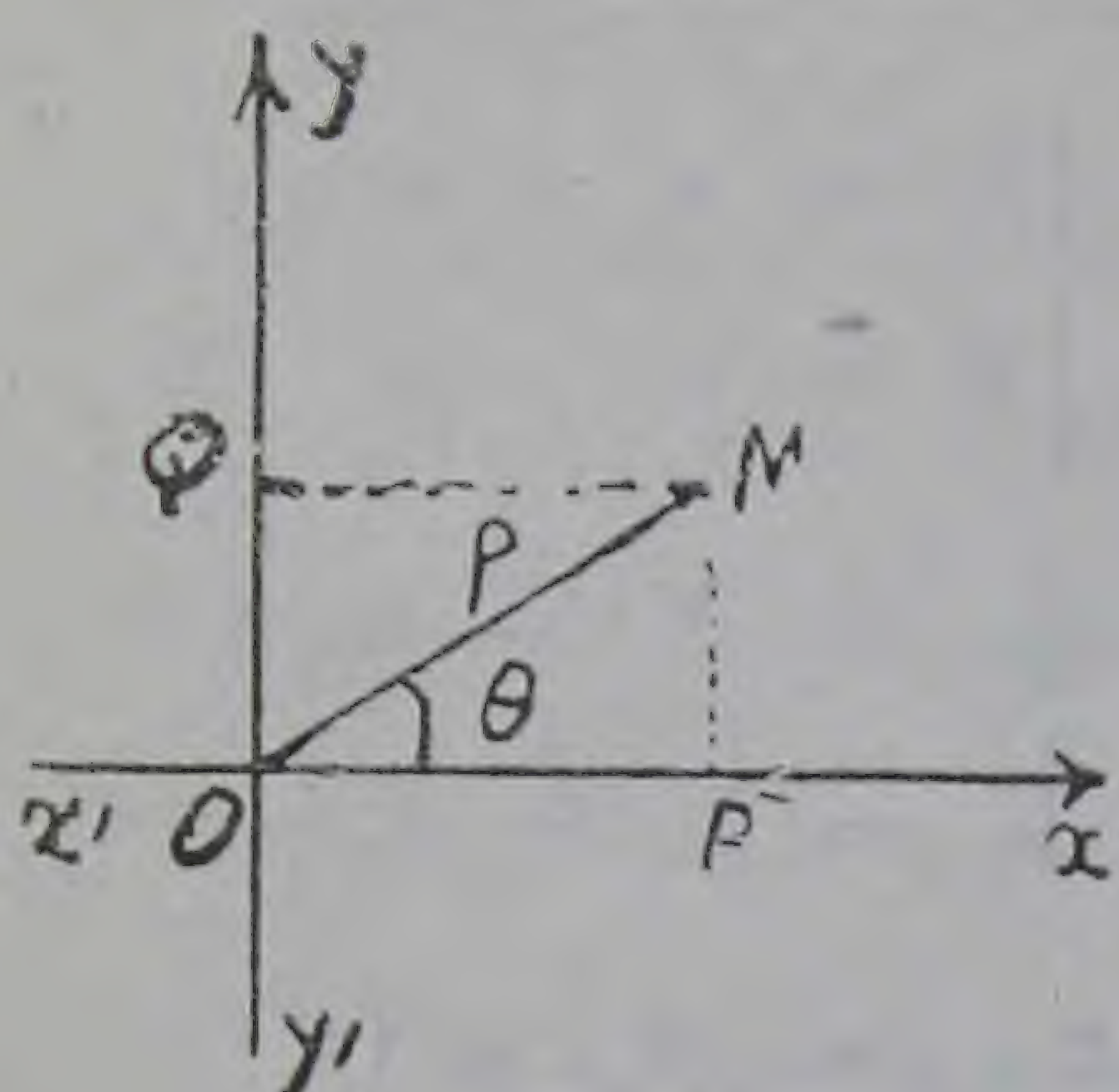
۱۳۷ - بستگی بین مختصات قطبی و مختصات

قائم - (۱) در صفحه - (ش ۵)

(۱) - شعاع حاصل را با حرف یونانی (رو) نمایش میدهند

و در شکل هم همان حرف نوشته شده ولی چون در چاپخانه آن حرف

موجود نبود در متن بجای آن ρ گذاشته شده است



$$\begin{cases} OP = x = r \cos \theta \\ OQ = y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \frac{y}{x} = \tan \theta \end{cases}$$

۲ - در فضا (ش ۶)

$$OM' = OM \cos \theta = r \cos \theta$$

$$\begin{cases} x = OP = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = OQ = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = OR = r \sin \theta \end{cases}$$

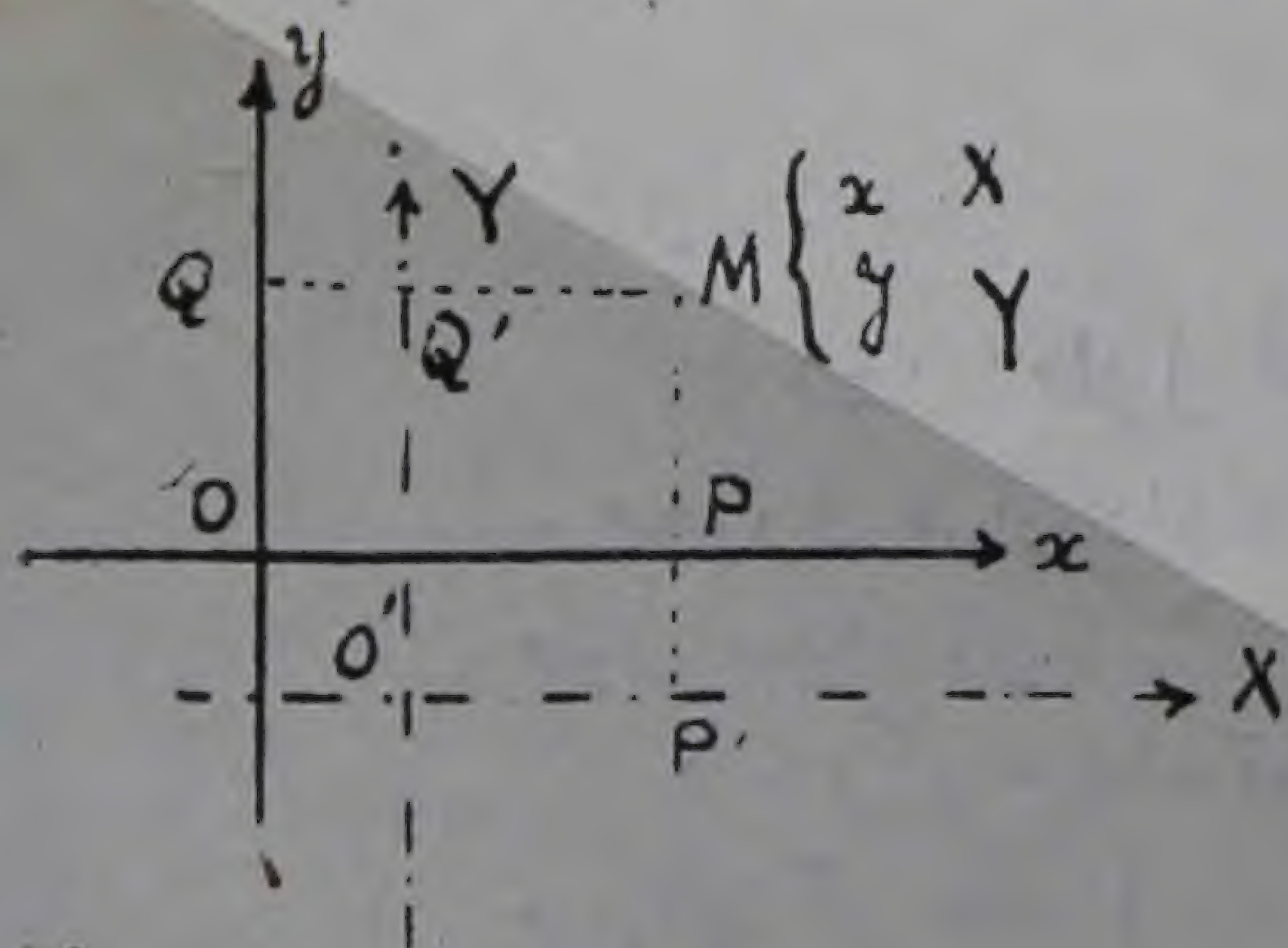
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ \frac{y}{x} = \tan \varphi \\ \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \tan \theta \end{cases}$$

۱۳۸ - مختصات کروی -

رجوع شود به قسمت هیئت.

ش ۶

۱۳۹ - تغییر محورهای مختصات - ۱) انتقال



شکل ۷

محورها - هر گاه محورهای

مختصات ox و oy را به موازات

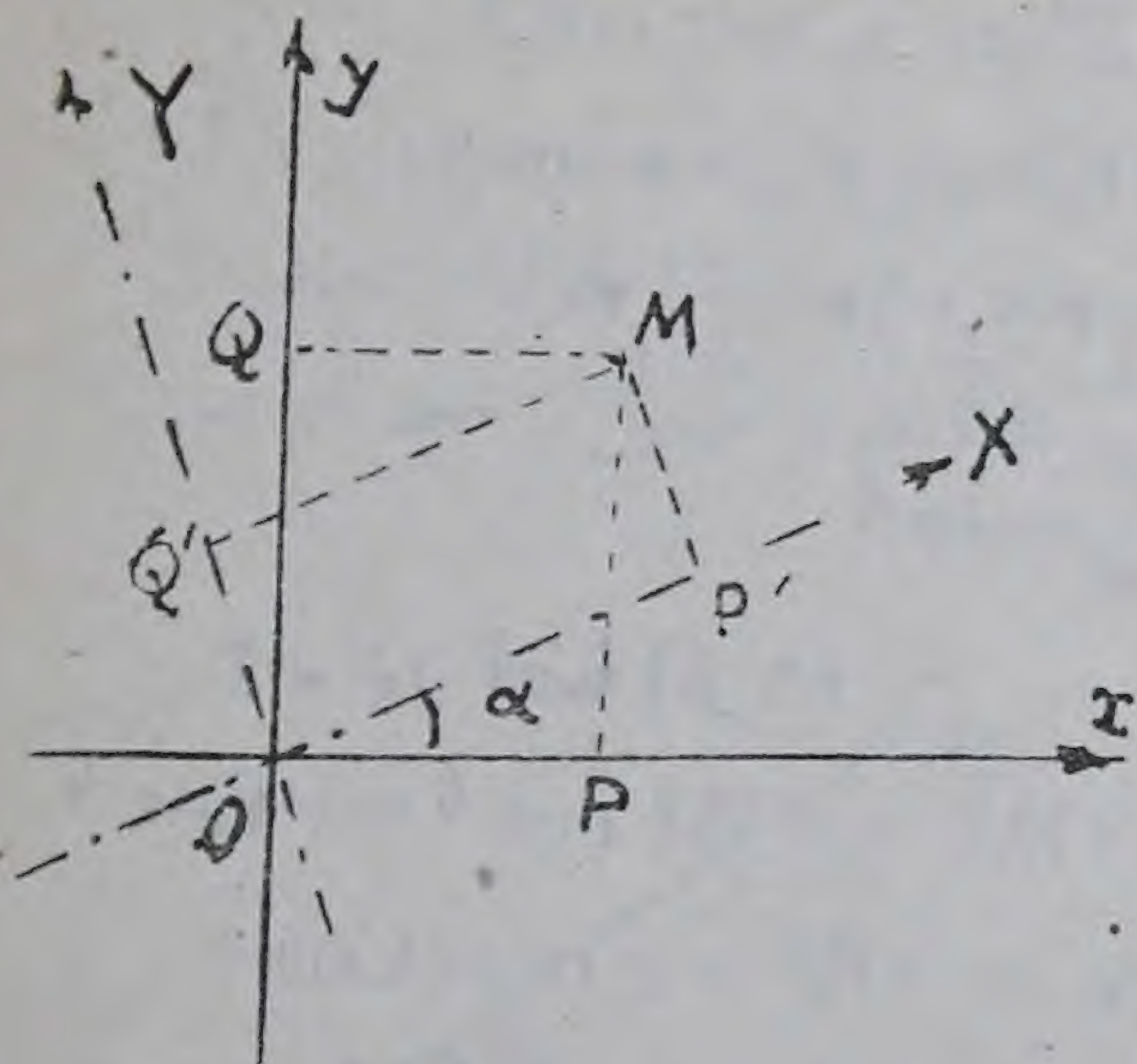
خود حرکت دهیم تا بوضع $O'X$ و $O'Y$

در آیند (ش ۷) و مختصات نقطه M

را نسبت بدو محور اول x و y و

نسبت به محورهای دوم X و Y انگاشته

و مختصات نقطه O' را α و β بنامیم



$$X = x - \alpha$$

$$Y = y - \beta$$

$$x = X + \alpha$$

$$y = Y + \beta$$

(۲) دوران محورها

اگر محورهای Ox و Oy بعد از دورانی با اندازه

زاویه φ بوضع Ox و

OY در آیند (ش ۸) و مختصات يك نقطه M را نسبت با اولیها x و y و نسبت بدومیها X و Y بنامیم، از تصویر کردن دوره چندبر (کثیرالاضلاع) OPMP بر روی محور مقتضی چنین خواهیم داشت :

تصویر $MP' = OP + PM + OP'$

$$X = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$Y = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

یعنی :

$$x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi$$

$$y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi$$

$$X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$$

و

۱۴۰ - طول قطعه خط - ۱) درازی هر قطعه خط که

بر محوری قرار داشته باشد برابر است با طول منتها منهای طول مبدا آن .

۲ - اگر مبدا قطعه خطی نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و

منتهای آن نقطه $B(x_2, y_2, z_2)$ باشد :

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

۱۴۱ - تقسیم قطعه خط به نسبت k

هر گاه نقطه $M(X, Y, Z)$ قطعه خط AB را که مختصات دو انتهای آن $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ باشند

به نسبت k تقسیم نماید، یعنی $k =$ باشد :

$$M \begin{cases} X = \frac{kx_2 + x_1}{k+1} \\ Y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1} \\ Z = \frac{kz_2 + z_1}{k+1} \end{cases}$$

۱۴۲ - تبصره - ۱) اگر M وسط AB باشد $K = ۱$ پس

مختصات وسط قطعه خط و اسطه عددی مختصات مبدأ و منتهای قطعه اند.

۲) مختصات مرکز ثقل مثلث مساوی $\frac{۱}{۳}$ مجموع مختصات

سه رأس آن است.

۱۴۳ - روابط مهم :

الف - رابطه شال Chasle

۱ - اگر سه نقطه A و B و C بر روی یک محور باشند :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$$

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

۲ - اگر n نقطه A و B و C و ... و K و L بر روی يك محور باشند.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \dots + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LA} = 0$$

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \dots + \overrightarrow{KL} \quad \text{یا}$$

ب - رابطه فیثاغورث

اگر دو نقطه A و B بطولهای a و b بر روی محوری واقع باشند و M وسط AB باشد (شماره ۴۵)

$$OM^2 - AM^2 = OA \times OB$$

ج - رابطه اولر

اگر سه نقطه A و B و C بطولهای a و b و c بر روی محوری فرض شوند (شماره ۴۶)

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

د - رابطه استوارت

اگر سه نقطه A و B و C بطولهای a و b و c بر روی محوری فرض شوند (شماره ۴۷)

$$\overrightarrow{OA}^2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB}^2 \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OC}^2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

ه - اگر نقاط A و B و C و D بطولهای a و b و c و d محور OX را بر نسبت توافقی تقسیم نموده باشند:

$$2(ab + cd) = (a + b)(c + d) - 1$$

۲ - اگر O وسط AB فرض شود: $b = -a$

$$a^2 = cd$$

و

۳ - اگر O بر روی Δ فرض شود :

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

و

XXIII - متغیر و تابع

۱۴۴ - هر چیز تغییر پذیر را متغیر گویند .

۱۴۵ - تابع - اگر مابین دو متغیر رابطه‌ای موجود

باشد بطوریکه تغییر یکی بستگی بتغییر دیگری داشته باشد

دومی را متغیر اصلی و اولی را متغیر تابع یا تابع میگویند .

در میان رابطه دو متغیر هر یک را میتوان بدون تفاوت

تابع دیگری دانست .

تابع باینصورت نمایش داده میشود : $y = f(x)$

۱۴۶ - تعریف - اگر در تابع $y = f(u)$ ، u خود

تابعی از x باشد y را تابع تابع x نامند .

۱۴۷ - تابع معین آنستکه بازاء جمیع مقادیریکه

بمتغیر داده شوند دارای مقدار معینی باشد (یعنی موهوم یا

مبهم یا ∞ نباشد)

۱۴۸ - تابع اتصالی - تابع $y = f(x)$ را بازاء

$x = a$ اتصالی گویند بشرط آنکه $y = f(a)$ مقداری معین

باشد .

۱۴۹ - تابع انفصالی - تابع $y = f(x)$ را

بازاء $x=a$ انفصالی گویند اگر $f(a)$ مقدار معینی نباشد.
توضیح - توابع معین همیشه اتصالی هستند و توابع نامعین بازاء مقادیری از متغیر که تابع نامعین است انفصالی میباشند.

۱۵۰ - **تابع صعودی -** تابع را صعودی گویند اگر تابع و متغیر باهم بالا و پائین بروند. مثلاً قیمت پارچه تابع صعودی طول آنست.

۱۵۱ - **تابع نزولی -** تابع را نزولی گویند وقتی که جهت تغییرات تابع و متغیر مخالف باشد مثلاً مدت لازم برای ساختمان يك بنا تابع نزولی تعداد کارگرانیست که بکار گمارده میشوند.

۱۵۲ - **تابع رامتناوب** گویند اگر بازاء مقادیر متعددی از متغیر که تفاضل هر دو مقدار متوالی آنها مقدار ثابتی باشد تابع يك مقدار احرار نماید این تفاضل ثابت را **دوره تناوب** گویند. مثلاً $y = \sin x$ تابع متناوبی است که 2π دوره تناوب آنست.

XXIV - حدود

۱۵۳ - هرگاه متغیری حین تغییر بعدد معینی نزدیک شده ولی هیچگاه مساوی آن نگردد آن عدد را حد متغیر گویند. اگر متغیر از حد کوچکتر باشد حد را فوقانی و گرنه تحتانی نامند. مثال: محیط دایره حد فوقانی محیط کثیرالاضلاع محاطی و حد تحتانی محیط کثیرالاضلاع محیطی است وقتی عدد اضلاع آنها

بی نهایت زیاد شود. عبارت دیگر عدد m حد متغیر x است در صورتیکه قدر مطلق $(x - m)$ از هر عدد مثبت کوچکی کوچکتر شود و قتیکه x بینهایت به m نزدیک گردد.

۱۵۴ - خواص حدود

- ۱ - حد مجموع جبری چند تابع از متغیر x ، وقتی که x بسمت حدی میل نماید، مساوی است با مجموع حدود آنها.
- ۲ - حد حاصل ضرب چند تابع از متغیر x ، وقتی که x بسمت حدی میل نماید، مساوی است با حاصل ضرب حدود آنها.
- ۳ - حد خارج قسمت دو تابع از متغیر x ، وقتی که x بسمت حدی میل نماید، مساوی است با خارج قسمت حدود آنها بشرط آنکه حد تابع مقسوم علیه مخالف صفر باشد.
- ۴ - حد m ام (یا ریشه m ام) یک تابع مساوی است با m ام (یا ریشه m ام) حد آن تابع.
- ۵ - حد کثیر الجمله صحیحی از x با $x = +\infty$ مساوی است با ∞ و علامتش علامت جمله ایست که بزرگترین نماینده را دارا باشد.

xxv - رفع ابهام

- ۱۵۵ - تعریف - اگر تابعی با x مقدار معینی از متغیر یکی از صورتهای $\frac{0}{0}$ ، $\infty \times 0$ ، یا $(\infty - \infty)$ در آید گویند تابع با x آن مقدار مبهم است. و پیدا کردن مقدار حقیقی تابع را با x آن مقدار رفع ابهام گویند.
- ۱۵۶ - رفع ابهام (۱) صورت $\frac{0}{0}$ در موقعی پیدا می

شود که صورت و مخرج تابع $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ دارای ریشه مشترک a باشند، و برای رفع ابهام باید عامل مشترک $x - a$ را هر چند دفعه که ممکن باشد از صورت و مخرج حذف نمود.

(۲) $\infty \times 0$ را میتوان بصورت $\frac{1}{\frac{1}{\infty \times 0}}$ یا

$\frac{0}{0}$ نوشت.

(۳) $\frac{\infty}{\infty}$ را میتوان بصورت $\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}$ یا $\frac{0}{0}$ نوشت

(۴) صورت $(\infty - \infty)$ - اگر در تابع

$y = f(x) - \varphi(x)$ ، $f(a) = \infty$ و $\varphi(a) = \infty$ باشد y را در

$\frac{f^2(x) - \varphi^2(x)}{f(x) + \varphi(x)}$ ضرب میکنیم تا بصورت

درآید بعد صورت و مخرج را بر $f^2(x) \varphi^2(x)$ تقسیم می نمائیم تا بشود:

$$y = \frac{\frac{1}{\varphi^2(x)} - \frac{1}{f^2(x)}}{\frac{1}{f(x)\varphi^2(x)} + \frac{1}{\varphi(x)f^2(x)}}$$

این کسر بازاء $x = a$ مساوی $\frac{0}{0}$ است.

۱۵۷ - نتیجه - مقدار حقیقی کسر $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ بازاء

$$x = \pm \infty$$

۱ - اگر درجه صورت از مخرج بزرگتر باشد ،

$\pm \infty$ است

۲ - اگر درجه صورت مساوی درجه مخرج باشد

مساوی است با خارج قسمت ضرایب جملی که دارای بزرگترین نما هستند .

۳ - اگر درجه صورت از مخرج کوچکتر باشد مساوی

صفر است .

XXVI - مشتقات

۱۵۸ - تعریف - اگر متغیر x از مقدار x_1 تا مقدار

x_2 تغییر کند میگویند باندازه $(x_2 - x_1)$ نمو کرده است

و این نمو را با علامت Δx نشان میدهد .

در تابع $y = f(x)$ بازاء هر نمو Δx تابع نموی مانند

Δy خواهد داشت .

۱۵۹ - تعریف - مشتق تابع $y = f(x)$ عبارتست

از حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتی که Δx میل کند بسمت صفر .

مشتق تابع $y = f(x)$ را به y' یا $\frac{dy}{dx}$ یا $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نمایش

میدهند .

۱۶۰ - مشتقات متوالی - چون مشتق هر تابع خود

تابعی از متغیر میباشد ممکن است از آنهم مشتق گرفت . این

مشتق را مشتق دوم تابع اصلی گویند. بهمین طریق ممکن است مشتق سوم و چهارم و ... و m ام گرفت.

۱۶۱ - مشتق تابع تابع - در تابع تابع $y = f(u)$

که $u = \varphi(x)$ ممکن است مشتق y را بر حسب u یا بر حسب x بدست آورد و بین آنها این رابطه برقرار است:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

۱۶۲ - محاسبه مشتق و خواص آن

۱ - مشتق مقادیر ثابت صفر است.

۲ - مشتق مجموع چند تابع:

$$\begin{cases} y = u + v - w \\ y' = u' + v' - w' \end{cases}$$

۳ - مشتق حاصلضرب چند تابع:

$$\begin{cases} y = u \cdot v \\ y' = uv' + vu' \end{cases}$$

$$y = u \cdot v \cdot w$$

$$y' = u'vw + v'u'w + w'uv$$

۴ - مشتق خارج قسمت دو تابع:

$$\begin{cases} y = \frac{u}{v} \\ y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \end{cases}$$

۵ - مشتق قوه m ام يك تابع

$$y = u^m$$

$$y' = mu u^{m-1}$$

۶ - مشتق ریشه m ام يك تابع

$$y = \frac{n}{m} u \times \frac{1}{m \sqrt{u^{m-n}}}$$

۱۶۳ - مشتق توابع متداول

۱ - $y = C$

$$y' = 0$$

۲ - $y = x$

$$y' = 1$$

۳ - $y = x^m$

$$y' = mx^{m-1}$$

۴ - $y = ax^m$

$$y' = amx^{m-1}$$

۵ - $y = \frac{1}{x}$

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

۶ - $y = \frac{a}{x^m}$

$$y' = -\frac{am}{x^{m+1}}$$

۷ - $y = \sqrt{x}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۸ - $y = \frac{m}{\sqrt{x}}$

$$y' = -\frac{m}{2\sqrt{x}}$$

مشتق توابع مستدیره :

$$۹ - y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$۱۰ - y = \cos x$$

$$y' = -\sin x$$

$$۱۱ - y = \operatorname{tg} x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$۱۲ - y = \operatorname{Cot} x$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{Cot}^2 x)$$

$$۱۳ - x = \sin u$$

$$y = u' \cos u$$

$$۱۴ - y = \cos u$$

$$y' = -u' \sin u$$

$$۱۵ - y = \operatorname{tgu}$$

$$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$۱۶ - y = \sin^2 x$$

$$y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$۱۷ - y = \cos^2 x$$

$$y' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$$

$$۱۸ - y = \sin (mx + a)$$

$$y' = m \cos (mx + a)$$

$$۱۹ - y = \cos (mx + a)$$

$$y' = -m \sin (mx + a)$$

$$۲۰ - y = \operatorname{tg} (mx + a)$$

$$y' = \frac{m}{\cos^2 (mx + a)}$$

$$۲۱ - y = \operatorname{cotg} (mx + a)$$

$$y' = -\frac{m}{\sin^2 (mx + a)}$$

$$۲۲ - y = \arcsin x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$۲۳ - y = \arccos x$$

$$y' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$$۲۴ - y = \operatorname{arctg} x \quad y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$۲۵ - y = \operatorname{arc cotg} x \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

خواص مشتق

۱۶۴ - مشتق تابع صعودی مثبت و مشتق تابع نزولی منفی است.

۱۶۵ - مشتق تابع بازاء طول نقاط ماگزیمم و مینیمم صفر است.

۱۶۶ - طول نقطه عطف منحنی نمایش يك تابع ریشه مشتق ثانی آن تابع است.

رفع ابهام بوسیله مشتق

$$۱۶۷ - \text{اگر در کسر } \frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ و } f'(a) = 0 \text{ و } \varphi(a) = 0$$

باشد مقدار حقیقی آن مساوی است با مقدار حقیقی خارج قسمت

مشتقات صورت و مخرج کسر بازاء $x=a$

مثال - مقدار حقیقی کسر

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3}$$

را بازاء $x=1$ باید تعیین کرد.

حل - از $f(x)$ و $\varphi(x)$ مشتق میگیریم

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{4x^3 - 15x^2 + 18x - 7}{4x^3 - 18x^2 + 24x - 10}$$

چون این کسر هم بازا $x=1$ مساوی $\frac{1}{2}$ است بار دیگر

از $f'(x)$ و $\varphi'(x)$ مشتق بگیریم؛

$$\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \frac{12x^2 - 30x + 18}{12x^2 - 36x + 24}$$

مقدار این کسر نیز بازا $x=1$ است، بار دیگر از

$f''(x)$ و $\varphi''(x)$ مشتق میگیریم

$$\frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)} = \frac{24x - 30}{24x - 36}$$

مقدار این کسر بازا $x=1$ مساوی $\frac{1}{4}$ است بنا براین

مقدار حقیقی $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ بازا $x=1$ نیز $\frac{1}{4}$ است.

XVII - تغییرات توابع

۱۶۸ - تعریف - مقصود از تعیین تغییرات تابع

$y = f(x)$ تحقیق درجهت تغییرات آن تابع است بازا مقادیر مختلف x و قتی که x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند، یعنی تعیین آنکه تابع درجه فواصل صعودی و درجه فواصل نزولی است و بازا چه مقادیری از x ما کزیمم یا می نیمم یا مساوی صفر میباشد.

۱۶۹ - تغییرات تابع درجه اول $y = ax + b$

وقتی x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر نماید تغییرات تابع y

بستگی به علامت a دارد، اگر a مثبت باشد تابع صعودی و اگر منفی باشد تابع نزولی است.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
y	$a > 0$	$-\infty$	$+\infty$
	$a < 0$	$+\infty$	$-\infty$

ماکزیمم و می نیمم

۱۷۰ - تعریف - اگر تابع $y = f(x)$ بازاء $x = a$

اتصال یافته و بازاء $x = a - \epsilon$ مقدار است مثبت و بی نهایت کوچک (کوچک) صعودی و بازاء $x = a + \epsilon$ نزولی باشد میگویند تابع بازاء $x = a$ ماکزیمم است ؛ و هرگاه تابع بازاء $x = a - \epsilon$ نزولی و بازاء $x = a + \epsilon$ صعودی باشد گویند تابع بازاء $x = a$ می نیمم میباشد.

۱۷۱ - تعیین ماکزیمم و می نیمم بوسیله مشتق -

برای بدست آوردن ماکزیمم و می نیمم تابعی مشتق آن را مساوی صفر قرار میدهیم و جواب های آنرا بجای x در تابع میگذاریم. مقداری که برای y بدست می آید ماکزیمم است هرگاه تابع قبل از آن صعودی و بعد از آن نزولی باشد و می نیمم است هرگاه تابع پیش از آن نزولی و بعد از آن صعودی باشد (شماره ۱۶۵)

۱۷۲ - طریقه مستقیم برای تعیین ماکزیمم و

می نیمم بعضی توابع - ممکنست بدون استعمال مشتق در بعضی از توابع مقدار ماکزیمم یا می نیمم را مستقیما بدست آورد. این امر در مواردی ممکنست که هرگاه تابع $y = f(x)$ را بر حسب قوای نزولی x مرتب نمائیم و y را پارامتر فرض کنیم بتوان برای معادله اخیر ریشه مضاعف بدست آورد ؛ در اینصورت مقادیری

از پارامتر y که بازاء آنها معادله ریشه مضاعف پیدا کند ما کزیمم یا می نیمم تابع هستند.

مثال - تابع $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$ را نسبت به x مرتب

می کنیم.

$$(1) (y-1)x^2 - 2(y+1)x + 3(y+1) = 0$$

معادله (۱) بازاء

$$(2) \Delta = (y+1)^2 - 3(y-1)(y+1) = 0$$

ریشه مضاعف دارد و $y_1 = -1$ و $y_2 = 2$ ریشه های معادله (۲) ما کزیمم و می نیمم تابع مذکور میباشند.

۱۷۳ - ما کزیمم و می نیمم مطلق

۱ - اگر حاصل جمع چند عدد مثبت ثابت باشد حاصل ضرب

آنها وقتی ما کزیمم است که همه آن اعداد باهم مساوی باشند.

ب - اگر حاصل ضرب چند عدد مثبت ثابت باشد مجموع

آنها موقعی می نیمم است که همه آنها باهم مساوی باشند.

۱۷۴ - تغییرات تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

تابع را میتوان بصورت

نوشت (شماره ۷۲)

حال چون x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند قدر مطلق

تغییرات y بستگی به تغییرات $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ و جهت تغییرات آن بستگی

بعلامت a دارد. این تغییرات را میتوان در جدول ذیل (که در آن $M = \frac{\xi ac - b^2}{\xi a}$ فرض شده است) خلاصه کرد:

x	$-\infty$	\nearrow	$-\frac{b}{2a}$	\nearrow	$+\infty$
$x + \frac{b}{2a}$	$-\infty$	\nearrow	\cdot	\nearrow	$+\infty$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	\searrow	\cdot	\nearrow	$+\infty$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + M$	$+\infty$	\searrow	$\frac{M}{a}$	\nearrow	$+\infty$
$y \begin{cases} a > 0 \\ a < 0 \end{cases}$	$+\infty$	\searrow	M می نیمم	\nearrow	$+\infty$
	$-\infty$	\nearrow	M ماکزیمم	\searrow	$-\infty$

اگر $\Delta = b^2 - \xi ac > 0$ باشد x' و x'' ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ در دو طرف $-\frac{b}{2a}$ قرار داشته y بازاء آنها تابع صفر است.

۱۷۵ - تغییرات تابع دو مجذوری $y = ax^2 + bx + c$

تابع را میتوان بصورت $y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{\xi ac - b^2}{\xi a^2} \right]$ نوشت و تغییرات آن وقتی که x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند در جدول ذیل خلاصه میشود $\left(M = \frac{\xi ac - b^2}{\xi a} \right)$:

x		$-\infty$	\nearrow	$-\sqrt{\frac{-b}{ra}}$	\nearrow	\cdot	\nearrow	$+\sqrt{\frac{-b}{ra}}$	\nearrow	$+\infty$
$\left(x^r + \frac{b}{ra}\right)^r$		$\frac{b}{a}$	\searrow	$+\infty$	\searrow	\cdot	\nearrow	$\frac{b^r}{\xi a^r}$	\searrow	$+\infty$
$\left\{ \frac{b}{a} < \cdot \right.$		$+\infty$	\searrow	\cdot	\nearrow	$\frac{b^r}{\xi a^r}$	\searrow	\cdot	\nearrow	$+\infty$
$\left. \frac{b}{a} > \cdot \right\}$		$+\infty$	\searrow	\cdot	\nearrow	$\frac{b^r}{\xi a^r}$	\searrow	\cdot	\nearrow	$+\infty$
$a > \cdot$		$b > \cdot$	$+\infty$	\searrow	M	\nearrow	C	\searrow	M	$+\infty$
$a < \cdot$		$b < \cdot$	$+\infty$	\searrow	M	\nearrow	C	\searrow	M	$+\infty$
y		$b > \cdot$	$-\infty$	\nearrow	M	\searrow	C	\nearrow	M	$-\infty$
$b < \cdot$		$-\infty$	\nearrow	C	\searrow	M	\nearrow	C	\searrow	$-\infty$

در صورتیکه $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a} > 0$ باشند چهار

ریشه معادله $ax^2 + bx + c = 0$ در دو طرف $\pm \sqrt{\frac{-b}{2a}}$ قرار

می گیرند و تابع بازاء آنها صفر است. هرگاه $\Delta > 0$ و

و $\frac{c}{a} < 0$ باشند دو ریشه معادله یکی طرف چپ $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$

و دومی طرف راست $+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ قرار میگیرند.

xxVIII - نمایش هندسی توابع

۱۷۶ - تعریف ۱ - در تابع $y = f(x)$ بازاء هر مقدار

x مقداری برای y پیدا میشود. چون این دو مقدار را مختصات

نقطه‌ای مانند M فرض کنیم نسبت بدو محور عمود برهم $x'Ox$ و

$y'Oy$ وضع آن نقطه را میتوان مشخص کرد. چون x ، و در نتیجه

y ، تغییر کنند M در صفحه تغییر جا میدهد و از حرکت آن یک

منحنی پدید می آید. این منحنی را منحنی نمایش تغییرات تابع

$y = f(x)$ میگویند.

پس هر نقطه که بر منحنی باشد مختصاتش در رابطه

$y = f(x)$ صدق میکند و هر نقطه که مختصاتش در آن رابطه

صدق کند بر روی منحنی است.

تعریف ۲ - منحنی مکان هندسی نقاطی است که بر

حسب قاعده معینی، در صفحه یا در فضا، تغییر مکان دهند.

رابطه‌ای که این قاعده را بیان می کند معادله منحنی است.

نمایش تغییرات تابع درجه اول $ax + by + c = 0$

۱۷۷ - قضیه - منحنی نمایش تغییرات تابع درجه اول خطی است مستقیم .

۱۷۸ - قضیه - مختصات نقاط هر خط مستقیم در معادله درجه اول $ax + by + c = 0$ صدق میکند .

۱۷۹ - قضیه - در هر سه جمله درجه اول $ax + by + c = 0$:

اولا: $a = 0$ باشد، $by + c = 0$ یا

منحنی نمایش $y = -\frac{c}{b}$ خطی است موازی محور x ها .

ب) معادله هر خط که موازی محور x ها باشد $y = d$ است،

ثانیا: $b = 0$ باشد، $x = -\frac{c}{a}$. منحنی

نمایش x خطی است موازی محور y ها .

ب) معادله هر خط موازی محور y ها $x = e$ است .

ثالثا: $c = 0$ اگر $y = -\frac{a}{b}x$ باشد؛ منحنی خطی

است که بر O ، مبدأ مختصات، میگذرد .

ب) معادله هر خط که بر مبدأ مختصات بگذرد

$y = mx$ است .

رابعا: اگر a و b و c مخالف صفر باشند خط محورها

را در دو نقطه قطع میکند و معادله آن بصورت $y = mx + n$

است . در این صورت m ضریب زاویه‌ای و n عرض از مبدأ

خط است .

۱۸۰ - ضریب زاویه‌ای هر خط تاثرات زاویه ایست

که این خط با جهت مثبت محور x ها تشکیل میدهد . پس ضریب

زاویه‌ای خطوط موازی محور x ها صفر و از آن خطوط موازی محور y ها ∞ است.

۱۸۱- زاویه دو خط - اگر m و m' ضریب زاویه ای

دو خط Δ و Δ' و α زاویه بین آنها باشد:

$$tg \alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

دو خط موازی: اگر $\alpha = 0$ باشد $m = m'$ یعنی

ضرایب زاویه‌های دو خط موازی مساویند.

دو خط عمود بر هم: اگر $\alpha = \frac{\pi}{2}$ باشد $tg \alpha = \infty$

یعنی $1 + mm' = 0$ پس $m' = -\frac{1}{m}$ یعنی اگر خطی بر خط

دیگر عمود باشد ضریب زاویه‌هایش مساوی عکس ضریب زاویه دیگر است با علامت مخالف.

۱۸۲- معادله خطی که بر یک نقطه می‌گذرد - معادله

خط Δ که با ضریب زاویه‌ای m بر نقطه $M(x', y')$ می‌گذرد:

$$y - y' = m(x - x')$$

۱۸۳- معادله خطی که بر دو نقطه می‌گذرد - اگر

مختصات دو نقطه را به ترتیب (x', y') و (x'', y'') فرض کنیم

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

حالت مخصوص - معادله خطی که از نقاط $A(a, 0)$ و

$B(0, b)$ بگذرد:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(a و b را به ترتیب طول و عرض از مبدا خط گویند).

۱۸۴ - فاصله نقطه از خط - فاصله نقطه $M(x', y')$ از خطی که معادله اش $ax + by + c = 0$ میباشد عبارتست از :

$$d = \frac{ax' + by' + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۸۵ - رسم خط - برای رسم يك خط کافی است مختصات دو نقطه آنرا بدست آوریم . بهتر این است که طول یکی از این نقاط و عرض دیگری را صفر انگاشته عرض آن و طول این را از روی معادله خط بدست آوریم .

۱۸۶ - فصل مشترك دو خط - مختصات فصل

مشترك دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ جوابهای دستگاه :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

میباشند، یعنی

$$y = \frac{ca - ac'}{ab' - ba} \quad \text{و} \quad x = \frac{bc' - cb'}{ab - ba'}$$

مجانبا

۱۸۷ - تعریف - اگر نقطه M بتواند در روی يك منحنی بی نهایت دور شود میگویند این منحنی يك شاخه بی نهایت دارد .

۱۸۸ - مجانب - هر گاه خطی مانند Δ بتوان یافت

که فاصله نقطه M منحنی از آن ، وقتی که M بی نهایت در

روی منحنی دور شود، بسمت صفر میل کند، خط Δ را مجانب منحنی گویند.

بعبارت دیگر مجانب خطی است که در بی نهایت بر منحنی مماس شود.

مجانِب بر سه قسم است: افقی یا موازی محور x ها، قائم یا موازی محور y ها، مایل.

۱۸۹ - **مجانِب افقی** - هرگاه در تابع $y = f(x)$ وقتی که x بی نهایت بزرگ شود y بسمت مقدار ثابت a میل کند خط $y = a$ را مجانب افقی منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ گویند.

۱۹۰ - **مجانِب قائم** - هرگاه در تابع $y = f(x)$ وقتی که y بی نهایت بزرگ شود x بسمت مقدار ثابت b میل کند خط $x = b$ مجانب قائم منحنی است.

۱۹۱ - **مجانِب مایل** - اگر خط $y = mx + n$ مجانب مایل منحنی $y = f(x)$ باشد:

m حد $\frac{y}{x}$ است وقتی که x میل کند بسمت بی نهایت

n حد $y - mx$ است وقتی که x میل کند بسمت بی نهایت.

۱۹۲ - **قاعده عملی برای پیدا کردن مجانبها**

(۱) منحنیهائی که معادله آنها خطی است، یعنی کسری

یا اصم نیست، مجانب ندارند.

(ب) در تابع کسری $y = \frac{f(x)}{\phi(x)}$ برای تعیین مجانبها

باینطریق باید عمل کرد :

۱ - مجانب قائم : معادله آنها ریشه های $\varphi(x) = 0$ است .

۲ - مجانب افقی : معادله آنها حد کسر $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$

است وقتی x میل کند بسوی بی نهایت (شماره ۱۵۶)

۳ - مجانب مایل : خارج قسمت تقسیم $f(x)$ بر $\varphi(x)$ معادله مجانب مایل است .

تبصره ۵ - اگر درجه $\varphi(x)$ از $f(x)$ زیادتر یا با آن مساوی باشد منحنی مجانب مایل ندارد . اگر درجه $f(x)$ از $\varphi(x)$ یکی بیشتر باشد مجانب خطی مستقیم است . هرگاه اختلاف درجات بیش از یکی باشد مجانب منحنی است . در معادلات اصم (غیر کسری) مجانب موازی (قائم و افقی)

نیست و معادله مجانب مایل پس از تعیین m حد $\frac{y}{x}$ و n حد $y - mx$ وقتی x میل کند بسوی بی نهایت بدست می آید .

تقعر و تحدب

۱۹۳ - تقعر و تحدب - اگر مماس مرسوم در نقطه M بر منحنی ، منحنی را در همان نقطه قطع نکند میگویند منحنی در این نقطه محدب (یا مقعر) است . بر حسب آنکه منحنی در مجاورت M بالا یا پائین مماس باشد میگویند تقعر منحنی بطرف y های مثبت یا منفی است و بر حسب آنکه بر است یا بچپ مماس باشد تقعر منحنی بطرف x های مثبت یا منفی است .

۱۹۴ - نقطه عطف - اگر مماس در M بر منحنی ،

منحنی را در همان نقطه قطع کند، منحنی در آن نقطه تغییر جهت تقعر داده است M^0 را نقطه عطف منحنی میگویند.

۱۹۵ - قضیه - مشتق دوم هر تابع بازاء طول نقاطی که تقعر منحنی نمایش آن تابع بطرف y های مثبت است مثبت و بازاء طول نقاطی از منحنی که تقعر آن بطرف y های منفی است منفی میباشد.

نتیجه - در نقطه عطف مشتق دوم مساوی صفر است.

تقارن

۱۹۶ - محور تقارن - خط Δ را محور تقارن يك منحنی گویند در صورتیکه اگر خطی بر هر نقطه غیر مشخص N از Δ عمود گردد و منحنی را در M' و M قطع کند، N وسط MM'' باشد.

مرکز تقارن - نقطه $A(\alpha, \beta)$ را مرکز تقارن منحنی گویند در صورتیکه اگر هر خط غیر مشخص که بر A بگذرد و منحنی را در دو نقطه M' و M'' قطع کند، A وسط $M'M''$ باشد.

۱۹۷ - تعیین محور تقارن - برای آنکه بدانیم منحنی

نمایش $y = f(x)$ محور تقارن دارد یا نه، و اگر دارد برای بدست آوردن معادله آن، خط Δ بمعادله $y = mx + n$ را (که در آن باید پارامترهای m و n را مشخص ساخت) فرض میکنیم و نقطه $A(\alpha, m\alpha + n)$ را بر آن اختیار مینمائیم

و از آن خط $y - (m\alpha + n) = -\frac{1}{m}(x - \alpha)$ بر Δ

عمود کرده M' و M'' فصل مشترکهای آنرا با منحنی $y=f(x)$ بدست می آوریم - اگر (x', y') و (x'', y'') مختصات M', M'' باشند و \triangle محور تقارن باشد چنین خواهیم داشت ؛

$$(1) \quad \frac{x' + x''}{2} = \alpha \quad (2) \quad \frac{y' + y''}{2} = m\alpha + n$$

روابط (۱) و (۲) نباید بستگی به α داشته باشند، پس هرگاه آنها را بر حسب α مرتب کنیم باید در هر يك ضریب α و جمله مستقل از α مساوی صفر شوند • باین ترتیب مقادیری برای m و n بدست می آید • اگر مقادیری که از روابط (۱) و (۲) بدست آمده اند با هم مساوی باشند \triangle محور تقارن است ، وگرنه نیست •

۱۹۸ - تعیین مرکز تقارن - برای تعیین آنکه منحنی $y = f(x)$ مرکز تقارن دارد نقطه $M(\alpha, \beta)$ را، که در آن α و β بعداً تعیین خواهند شد، اختیار می کنیم و خط $y - \beta = m(x - \alpha)$ را بر آن مرور داده محل برخورد آن را با $y = f(x)$ بدست می آوریم • اگر $A(x', y')$ و $B(x'', y'')$ نقاط تقاطع M و مرکز تقارن باشند :

$$(1) \quad \frac{x' + x''}{2} = \alpha \quad \text{و} \quad (2) \quad \frac{y' + y''}{2} = \beta$$

روابط (۱) و (۲) باید از m مستقل باشند پس باید ضرایب قوای مختلفه m در آنها مساوی صفر شوند • از بیان این شرط در رابطه (۱) برای α و β مقادیری بدست می آید، اگر این

مقادیر ضرایب قوای مختلفه m را در رابطه (۲) نیز صفر کنند.
 منحنی مرکز تقارن دارد و مقادیری که برای α و β بدست آمده.
 اند مختصات این مرکزند.

۱۹۹ - قضیه - اگر يك منحنی دو محور تقارن عمود
 بر هم داشته باشد محل تقاطع آنها مرکز تقارن منحنی است.

مماس بر منحنی

۲۰۰ - مماس - اگر خطی منحنی $y = f(x)$ را در
 M' و M'' قطع کند سپس در حول M' آنقدر بچرخد که M''
 بی نهایت به M' نزدیک شود حد خط را مماس بر منحنی در نقطه
 M' گویند.

۲۰۱ - ضریب زاویه ای مماس بر منحنی $y = f(x)$
 در نقطه ای بطول a عبارتست از مقدار مشتق $y' = f'(x)$ بازا
 $x = a$.

۲۰۲ - رسم مماس بر منحنی $y = f(x)$

(۱) معادله مماس بر منحنی که بر نقطه M بطول a واقع
 بر منحنی می گذرد عبارتست از $y - f(a) = f'(a)(x - a)$
 (۲) معادله مماسی که از نقطه $M(\alpha, \beta)$ واقع در خارج
 منحنی بر منحنی رسم شود بدو قاعده بدست می آید.

قاعده اول: تعیین ضریب زاویه ای مماس — معادله
 کلی خطوطی را که بر $M(\alpha, \beta)$ میگذرند مینویسیم:
 $y - \beta = m(x - \alpha)$ ؛ آنگاه آن را با معادله منحنی $y = f(x)$
 حل میکنیم؛ شرط آنکه خط بر منحنی مماس باشد اینست که

دستگاه يك ریشه مضاعف داشته باشد. مقداری از m که بازاء آن ریشه مضاعف بدست میآید ضریب زاویه‌ای مماس است.

قاعده دوم - تعیین طول نقطه تماس - معادله کلی

مماس بر نقطه ای از منحنی بمختصات $[a, f(a)]$ را می نویسیم:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

بعد بجای x و y مقادیر α و β را میگذاریم و a یعنی

طول نقطه تماس را بدست میآوریم.

رسم منحنی

۲۰۳ - برای رسم منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$

باینطریق عمل میکنیم:

(۱) ریشه‌های $f(x) = 0$ را بدست می آوریم. (۲) مقدار

y را بازاء $x = \pm\infty$ معین میکنیم.

(۳) معادلات مجانبها را تعیین مینمائیم (۴) بوسیله مشتق

طول و عرض نقاط ما کزیمم و می نیمم را معلوم میکنیم.

(۵) با مشتق درم طول نقطه عطف را معین می کنیم.

(۶) جدول نمایش تغییرات را ترتیب میدهیم. (۷) نسبت

بدو محور متعامد نخست مجانبها را میسازیم و بعد بكمك نقاطی

که در جدول تغییرات ثبت شده اند و با مراعات جهت تغییرات

منحنی را رسم میکنیم. اینك چند مثال:

مثال ۱ - رسم منحنی تابع هموگرافيك $y = \frac{2x-1}{x+1}$

$$y = 0, \quad x = -\frac{1}{2}$$

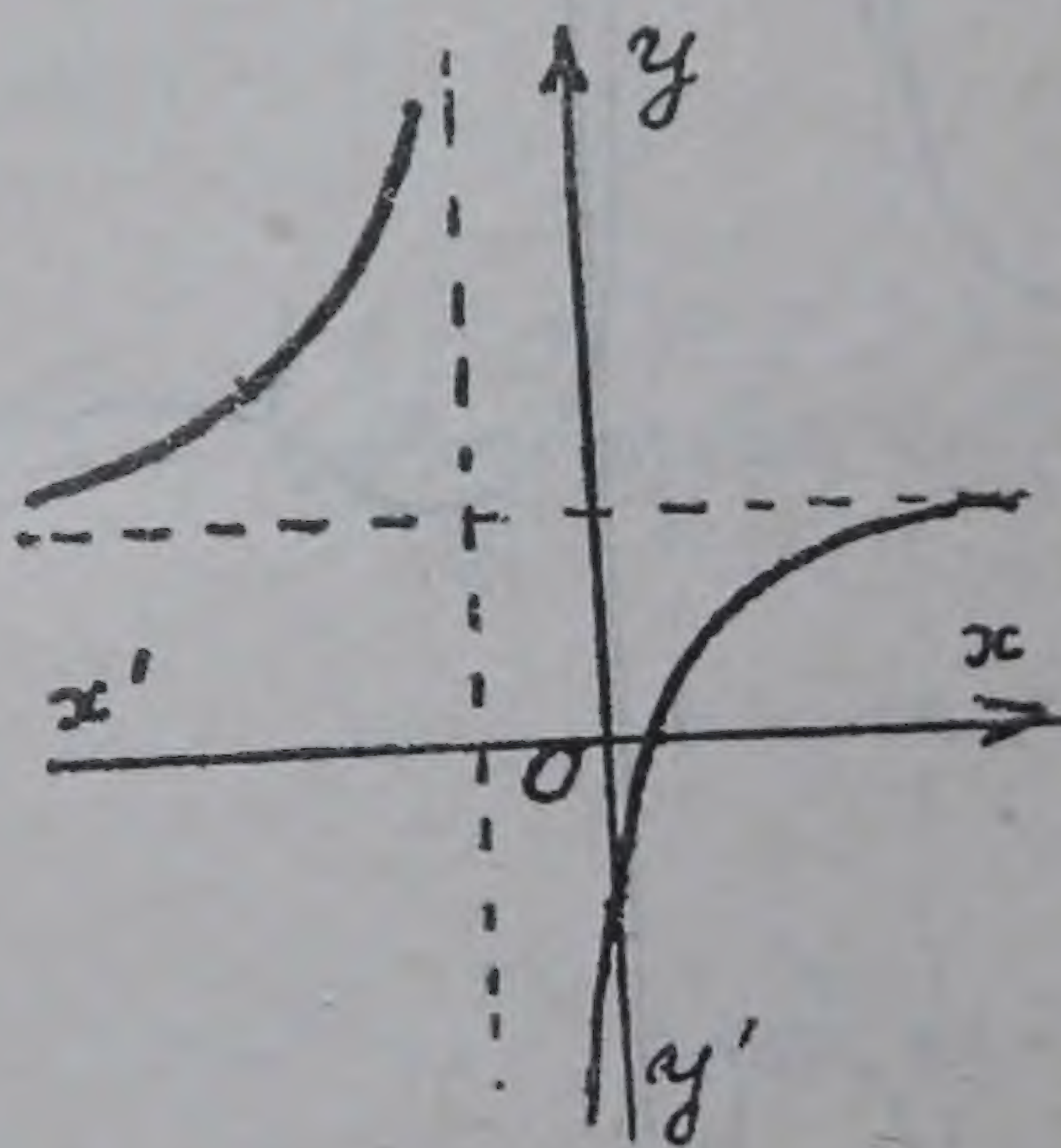
$$x = 0, \quad y = -1$$

$$y = \infty, x = -1$$

$$x = \infty, y = 2$$

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2} \text{ همیشه مثبت است}$$

x	$-\infty$	-1	\cdot	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	+	+		+	+
y	$2 \nearrow +\infty$	$\nearrow -1$		$\nearrow \cdot$	$\nearrow 2$



$$y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4} \text{ مثال ۲ - تغییرات تابع}$$

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2 - 5)}{(x^2 + 5x + 4)^2} = 0 \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = +2 \\ y = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

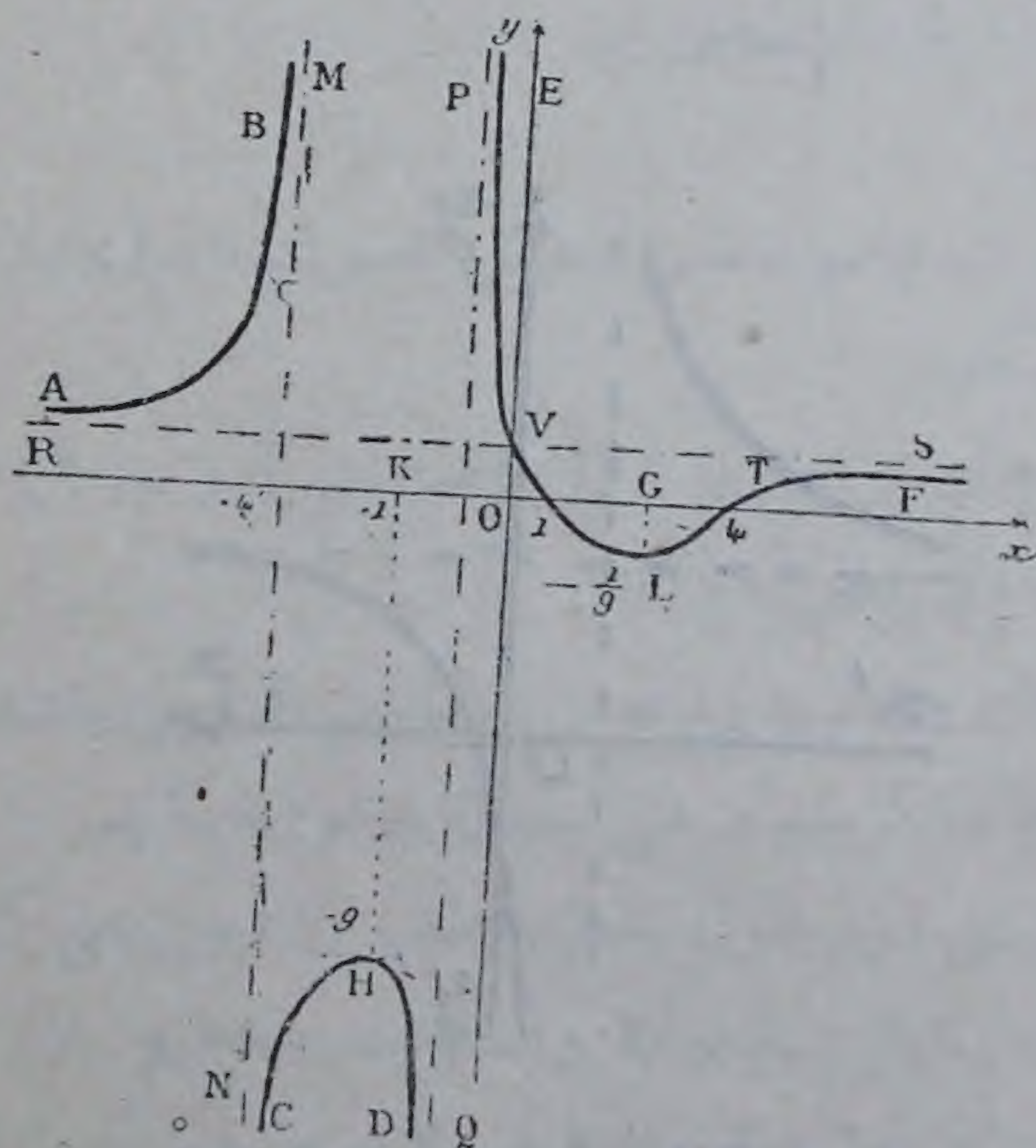
$$y = 0 \quad x = 1 \text{ و } x = 4$$

$$y = \infty \quad x = -1 \text{ و } x = -4$$

$$X = \infty \quad y = 1$$

$$X = 0 \quad y = 1$$

u	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y'	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+
y	$1 \nearrow$	$1 \nearrow$	$1 \nearrow$	$1 \nearrow$	$1 \searrow$	$1 \searrow$	$1 \searrow$	$1 \searrow$	$1 \searrow$	$1 \searrow$	$1 \searrow$	$1 \searrow$	$1 \nearrow$



مثال ۳ - مطلوب است رسم منحنی $y = \frac{\cos 3x}{1 + \cos 2x}$ وقتی:

$$0 < x < 2a$$

$$y = \frac{\cos 3x}{1 + \cos 2x} = \frac{4 \cos^2 x - 3}{2 \cos x}$$

$$y' = \frac{-\sin x (2 \cos^2 x + 3)}{2 \cos^2 x}$$

$$y = 0, \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$$

$$y = \infty, \cos x = 0$$

$$x = 90^\circ, 270^\circ$$

$$x = 0, y = 1$$

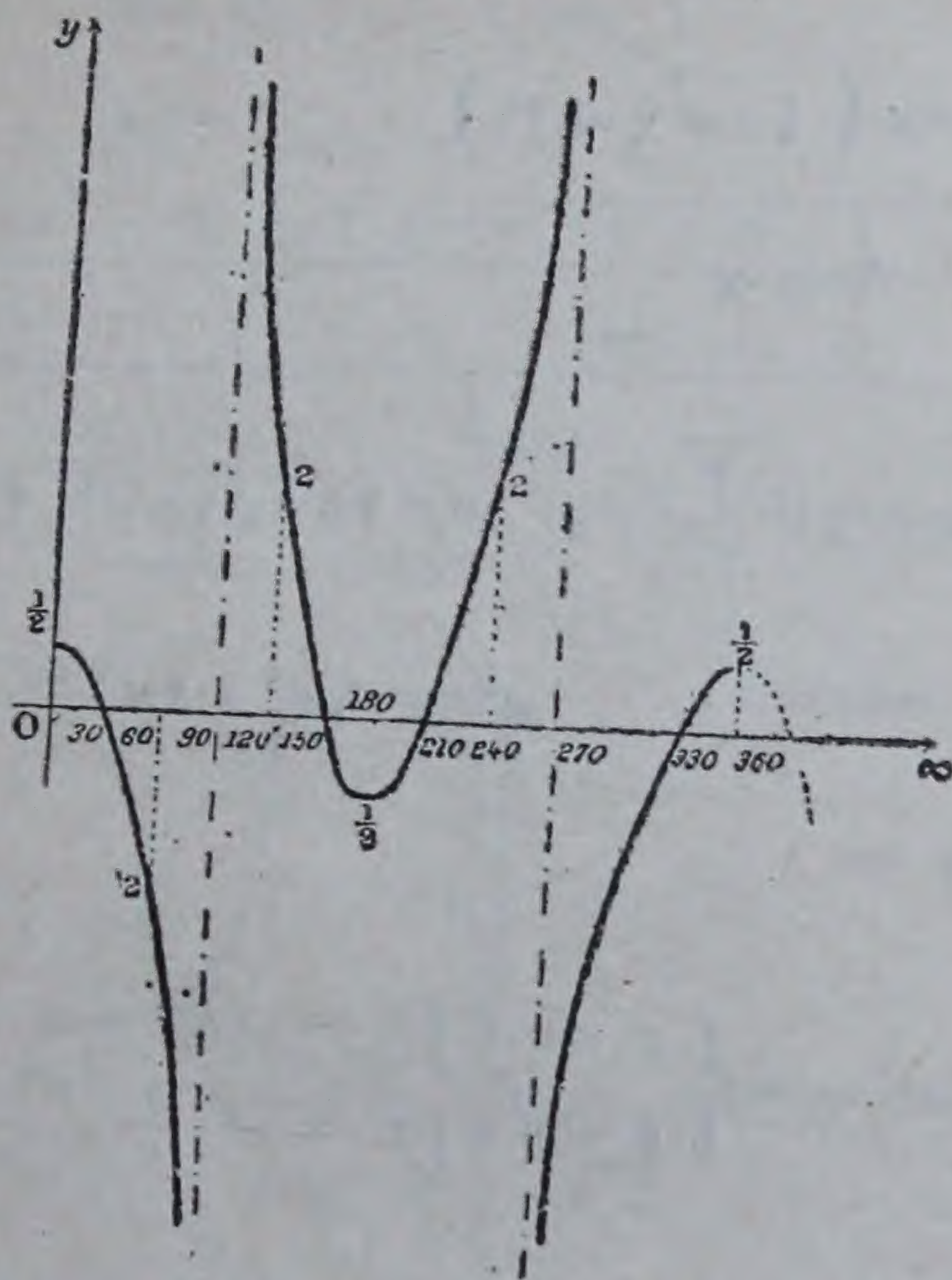
$$y' = 0, \sin x = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 180^\circ \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y' > 0$$

$$180^\circ < x < 360^\circ$$

x	0	30°	90°	100°	180°	210°	270°	330°	360°				
y'	0	0	$-$	0	0	0	$+$	0	0				
y	1	\searrow	\searrow	\searrow	$-\infty$	$+\infty$	\searrow	$-\frac{1}{2}$	\nearrow	\nearrow	$+\infty$	$-\infty$	\nearrow

حال اگر منحنی تغییرات فوق را رسم کنیم شکل ۱۱ بدست میآید



شکل ۱۱

XXIX حل معادلات بوسیله رسم منحنی

۲۰۴ - حل معادله $f(x) = 0$ - هرگاه جواب-

های معادله $f(x) = 0$ بر اهرائی که در حدود اطلاع ما هستند بدست نیایند میتوان منحنی نمایش تغییرات $y = f(x)$ را با دقت هرچه بیشتر رسم کرد؛ طول نقاط تلاقی این منحنی با محور x ها جوابهای تقریبی معادله اند.

۲۰۵ - حل دستگاه دو معادله دوجوئی - $f(x, y) = 0$
 $\varphi(x, y) = 0$

در هر يك از معادلات y را بر حسب x بدست میآوریم:
 $y = f_1(x)$ و $y = \varphi_1(x)$ ؛ آنگاه منحنی دو تابع اخیر را با دقت
 تمام رسم میکنیم؛ مختصات نقاط برخورد منحنیها جواب های
 دستگاه بدست میآید.

۲۰۶ - بحث در وجود و علامت ریشه های

معادله پارامتری $f(x, m) = 0$

از رابطه $f(x, m) = 0$ پارامتر m را بر حسب x بدست
 میآوریم؛ $m = f_1(x)$ ، سپس منحنی تغییرات $m = f_1(x)$
 را رسم میکنیم (m بجای y فرض میشود) و نیز خط $y = m$
 را وقتی m از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند رسم میکنیم، بر
 حسب آنکه خط منحنی را قطع نکند یا بکند یا بر آن مماس
 شود معادله دارای جواب نیست یا هست یا جواب مضاعف
 دارد.

xxx - حل نامعادلات بوسیله منحنی

۲۰۷ - منحنی نمایش $y = f(x)$ صفحه را بدو ناحیه

تقسیم میکند. مختصات هر نقطه واقع بر منحنی در رابطه
 $y - f(x) = 0$ صادقند و مختصات هر نقطه غیر واقع بر منحنی در
 یکی از دو رابطه $y - f(x) > 0$ یا $y - f(x) < 0$ صدق می
 کنند. مختصات جميع نقاط واقع در یکی از دو ناحیه صفحه در
 یکی از دو رابطه اخیر و جميع نقاط واقع در ناحیه دیگر در
 رابطه دیگر صادق میباشند.

۲۰۸ - حل نامعادله $f(x, y) > 0$ - نخست

$f(x, y)$ را مساوی صفر انگاشته $y = f_0(x)$ را بوسیله آن بدست میآوریم و منحنی آنرا میکشیم، آنگاه مختصات يك نقطه M واقع در خارج این منحنی (مبداء مختصات در صورتیکه بر روی منحنی نباشد از هر نقطه دیگر بهتر است) را در رابطه $f(x, y)$ میگذاریم اگر نتیجه مثبت باشد جمیع نقاط واقع در ناحیه ای که شامل نقطه M است در نامعادله صادقند، والا نقاط ناحیه دیگر.

۲۰۹ - حل دستگاه نامعادلات

$$\begin{cases} f(x, y) > 0 \\ \varphi(x, y) > 0 \\ \psi(x, y) > 0 \end{cases}$$

برای هر يك از سه رابطه دستگاه ناحیه ای از صفحه را که جواب مسئله است نگاه داشته ناحیه دیگر را هاشور میزنیم مختصات نقاط قسمتهائی از صفحه که پس از خاتمه کار بی هاشور بمانند جوابهای دستگاهند.

XXXI - تابع اولیه - سطح محصور

۲۱۰ - اگر $y = f(x)$ مشتق اول تابع $Y = F(x)$ باشد

$F(x)$ را تابع اولیه $f(x)$ میگویند و آنرا چنین نمایش میدهند

$$Y = \int y dx = \int f(x) dx$$

مثال: $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x = \int (x^2 - x + 1) dx$

۲۱۱ - هرگاه پس از تعیین تابع اولیه تابع $y = f(x)$

دو مقدار a و b را بجای x قرار داده تفاضل مقادیری را که بدست می آیند تعیین کنیم میگوئیم مقدار تابع اولیه $y = f(x)$ را بین دوحد $x=a$ و $x=b$ بدست آورده ایم.

مثال: $\int_2^3 (x^2 - 5x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right]_2^3$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 5 \frac{3^2}{2} \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 5 \frac{2^2}{2} \right)$$

$$= \left(9 - \frac{45}{2} \right) - \left(\frac{8}{3} - 10 \right) = -\frac{37}{6}$$

۲۱۲ - قضیه - هرگاه $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد $F(x) + c$ هم تابع اولیه آنست (c عددیست ثابت)

۲۱۳ - توابع اولیه مهم بدینقرارند:

تابع	تابع اولیه
$y = 0$	$Y = a$ (مقدار ثابت)
$y = a$	$Y = ax + c$
$y = ax^m$	$Y = \frac{a}{m+1} x^{m+1} + c$
$y = \frac{a}{\sqrt{x}}$	$Y = 2a\sqrt{x} + c$

$$y = \sin x$$

$$Y = -\cos x + c$$

$$y = a \sin m$$

$$Y = -\frac{a}{m} \cos m x + c$$

$$y = \cos x$$

$$Y = \sin x + c$$

$$y = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$Y = \operatorname{tg} x + c$$

$$y = 1 + \operatorname{tg} x$$

$$Y = \operatorname{tg} x + c$$

$$y = \frac{1}{\sin x}$$

$$Y = \operatorname{colog} x + c$$

$$y = 1 + \operatorname{colog} x$$

$$Y = -\operatorname{colog} x + c$$

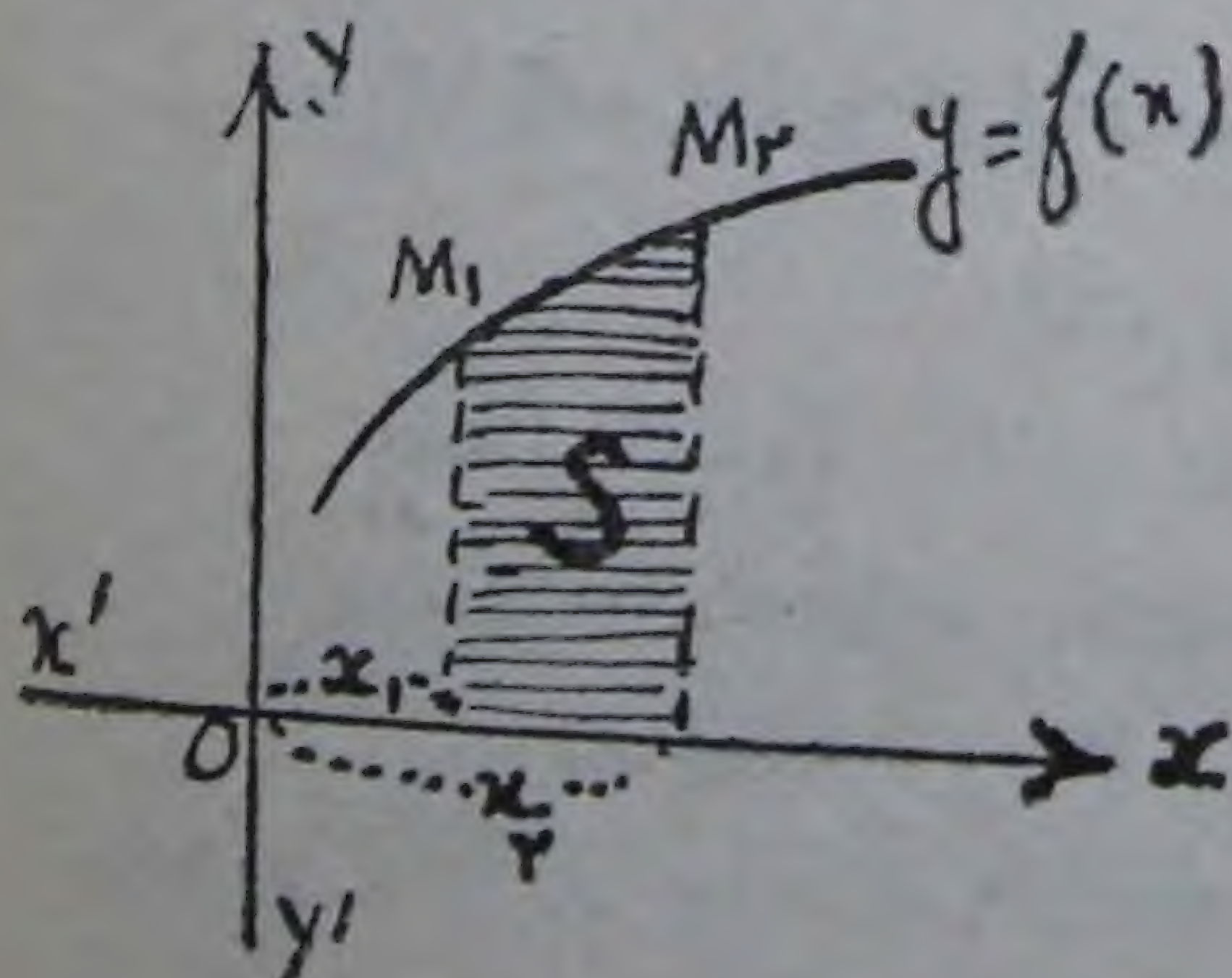
$$y = \sin x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \quad Y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c$$

$$y = \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \quad Y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c$$

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - 1 \quad Y = \operatorname{tg} x - x + c$$

۲۱۴ - قضیه . هرگاه تابع $y = f(x)$ در فاصله x_1

و x_2 اتصال باشد سطح محصور بین



منحنی نمایش $y = f(x)$ و محور x ها و دو عرض ثابت بطول x_1 و x_2

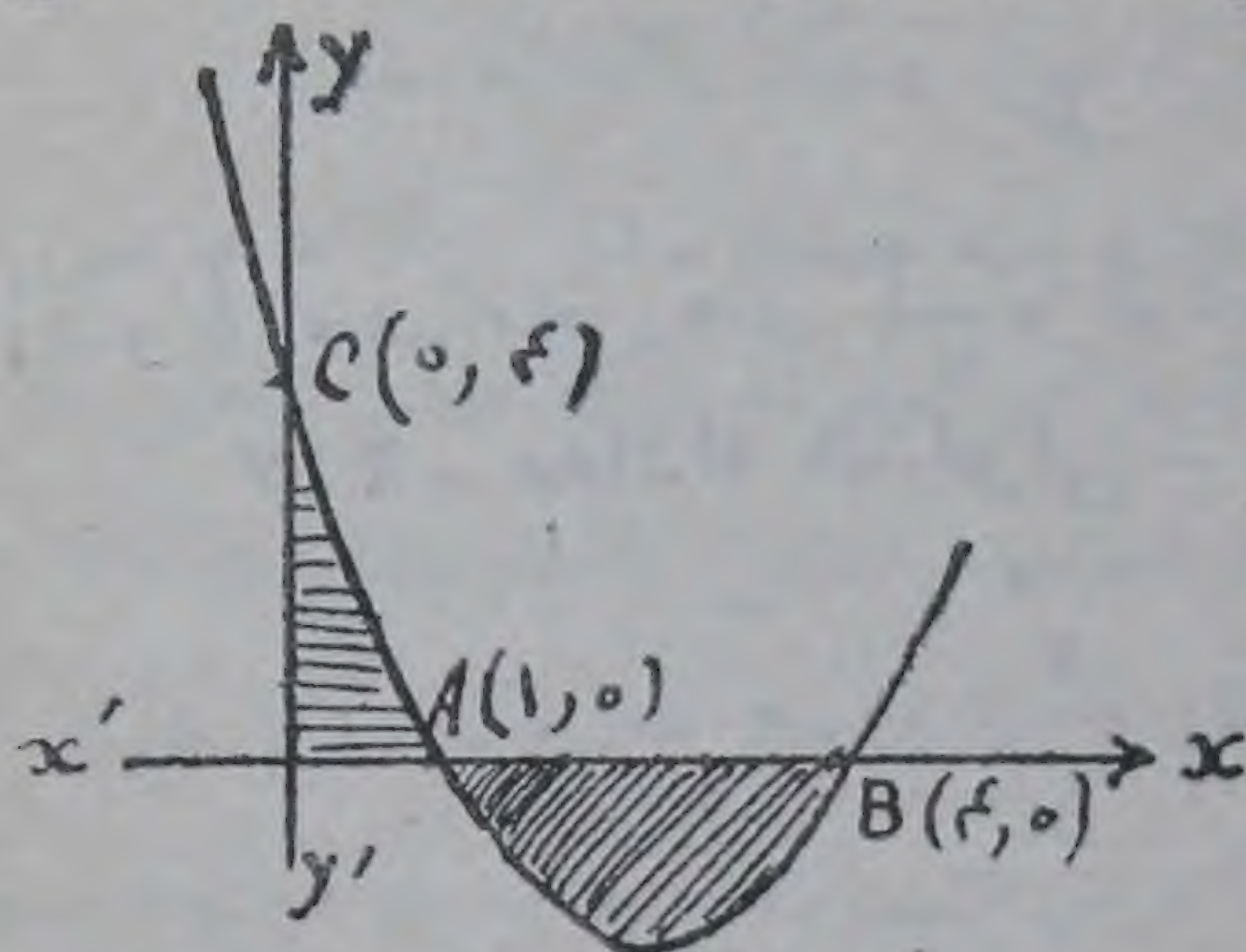
مساوی است با مقدار تابع اولیه

$y = f(x)$ بین دو حد x_1 و

x_2 یعنی :

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

مثال ۱ - سطح محصور بین محور x ها و منحنی



$$y = x^2 - 5x + 4$$

(ش ۱۳)

$$S = \int_1^4 (x^2 - 5x + 4) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x \right]_1^4$$

$$= -45$$

شکل ۱۳

مثال ۲ - سطح

بین منحنی مثال ۱ و محور y ها و محور x ها (ش ۱۳)

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^1 (x^2 - 5x + 4) dx = \frac{11}{6}$$

مجموع جبر

XXXII معادلات منحنی های مخصوص (۱)

۲۱۵ - معادله دایره - اگر مرکز دایره .

$M(\alpha, \beta)$ و شعاع آن R باشد:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0$$

۲۱۶ - معادله بیضی - وقتی مرکز و محورهای

آن بترتیب بر مرکز و محورهای مختصات منطبق باشند:

(۱) رجوع شود بقسمت مخروطات همین کتاب

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

(a و b نصف محورهاى بلند و کوتاه بیضی هستند)

۲۱۷ - معادله هذلولی - با شرایط شماره ۲۱۶ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

۲۱۸ - معادله سهمی - وقتی محور آن بر محور x

ها و رأس آن بر مرکز منطبق باشند و فاصله کانون از خط هادی را p مینمائیم :

$$y^2 = 2px$$

XXXIII حل معادلات دو جمله و سه جمله

۲۱۹ - معادله دو جمله - معادله دو جمله درجه n ام

بصورت $ax^n + bx^p = 0$ میباشد ($p < n$) برای حل آن x^p را عامل مشترك قرار میدهیم :

$$x^p(ax^{n-p} + b) = 0$$

علاوه بر p جواب مساوی ، جواب دیگر معادله

عبارتست از :

$$x = \sqrt[n-p]{-\frac{b}{a}}$$

اگر n و p هر دو زوج یا هر دو فرد باشند شرط قابل قبول بودن جواب آنست که a و b مختلف العلامه باشند.

۲۲۰ - معادله سه جمله - این معادله که صورت کلی

آن $ax^n + bx^p + cx^q = 0$ است در حالت خاصی که n و p

و q جمله های يك تصاعد حسابی باشند بصورت يك معادله

درجه دوم در می آید و قابل حل است. زیرا چون تفاضل

$n - p = p - q$ را r فرض کنیم $n - q = 2r$ میشود و چون در

سه جمله x^q را عامل مشترك قرار دهیم

$$x^q (ax^{n-q} + bx^{p-q} + c) = 0.$$

$$x^q (ax^{2r} + bx^r + c) = 0. \quad \text{یا}$$

x^r را مساوی y فرض مینمائیم، پس

$$x^q (ay^2 + by + c) = 0.$$

XXXIV. قاعده بزو برای حل معادلات چند

مجهولی درجه اول

۲۲۱ - این قاعده عبارتست از تعمیم قاعده حذف که

در حل معادلات دو مجهولی درجه اول ذکر گردیده است

(شماره ۶۵)

فرض کنیم مقصود حل دستگاه درجه اول سه مجهولی

$$(I) \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

اگر دو معادله آخر این دستگاه را به ترتیب در مقادیر
اختیاری α و β ضرب و سه معادله را باهم جمع و بر حسب x
و y و z مرتب کنیم چنین خواهیم داشت.

$$(a + a'\alpha + a''\beta)x + (b + b'\alpha + b''\beta)y \\ + (c + c'\alpha + c''\beta)z + (d + d'\alpha + d''\beta) = 0$$

بدیهیست که معادله اخیر جوابهای دستگاه (I) را قبول
میکند. حال ما میتوانیم مقادیر اختیاری α و β را طوری انتخاب
کنیم که ضرایب y و z در معادله اخیر صفر شوند.
برای اینکار باید α و β ریشههای دستگاه

$$\begin{cases} b + b'\alpha + b''\beta = 0 \\ c + c'\alpha + c''\beta = 0 \end{cases}$$

باشند یعنی

$$\beta = \frac{bc' - cb'}{b'c' - c'b''} \quad \alpha = \frac{b''c - cb''}{b'c'' - c'b''}$$

در اینصورت

$$x = - \frac{d + d'\alpha + d''\beta}{a + a'\alpha + a''\beta}$$

برای بدست آوردن y و z بهمین نحو ضرایب دو مجهول دیگر
را مساوی صفر قرار میدهیم.

xxxv معادلات مجهول القوی و لگاریتمی

۲۲۲ - تعریف - معادله مجهول القوی آنست که در آن مجهول بصورت نماینده عدد معلومی در آمده باشد. معادله لگاریتمی آنست که در آن لگاریتم عددهای مجهول و خود آنها وجود داشته باشند.

با چند مثال نوعهای مختلف اینگونه معادلات و راه حلهای آنها را نشان میدهم. (در مثالها حروف معلوم همه مثبت فرض میشوند)

$$a^x = b \quad \text{مثال ۱ -}$$

$$x \log a = \log b \quad x = \frac{\log a}{\log b}$$

مثال ۲

$$\frac{a^x}{n^m} = b$$

فرض میکنیم $n^x = y$ و $m^y = z$ باشند. پس $a^z = b$

$$x = \log \left[\frac{\log \left(\frac{\log b}{\log a} \right)}{\log m} \right] \times \frac{1}{\log n} \quad \text{یعنی}$$

$$a\alpha^x + b\alpha^x + c = 0 \quad \text{مثال ۳}$$

فرض میکنیم $\alpha^x = y$ باشد، پس $x = \frac{\log y}{\log \alpha}$

و y ریشه معادله $ay^2 + by + c = 0$ است.

$$\begin{cases} \log x + \log y = m \\ ax + by = c \end{cases} \quad \text{مثال ۴}$$

$$\begin{cases} xy = 10^m \\ ax + by = c \end{cases} \quad \text{این دستگاه تبدیل میشود بدستگاه}$$

$$(I) \begin{cases} x^y = y^x \\ x^a = y^b \end{cases} \quad \text{مثال ۵}$$

دستگاه (I) تبدیل میشود بدستگاه :

$$(II) \begin{cases} y \log x = x \log y \\ a \log x = b \log y \end{cases}$$

$$y = \frac{a}{b}x$$

که پس از تقسیم عضو بعضو بصورت

درمیآید و اگر فرض کنیم $b < a$ باشد مقادیر x عبارتند از جوابهای معادله

$$x^b \left(x^{(a-b)} - \left(\frac{a}{b} \right)^b \right) = 0$$

$$A^{(ax^2 + bx + c)} = B \quad \text{مثال ۶ معادله}$$

$$ax^2 + bx + c - \frac{\log B}{\log A} = 0 \quad \text{منجر میشود بمعادله}$$

تجزیه رادیکالهای مرکب XXXVI

$$223 - \text{مقصود از این عمل تجزیه عبارت } \sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

است بصورت مجموع یا تفاضل دو رادیکال .

قضیه - اگر $A + \sqrt{B} = A' + \sqrt{B'}$ باشد
(B و B' مجذور کامل نیستند) $A = A'$ و $B = B'$ میباشد .

حال برای تجزیه $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ آنرا مساوی $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ فرض نموده x و y را حساب میکنیم :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy}$$

پس :

$$\begin{cases} x + y = A \\ xy = \frac{B}{4} \end{cases}$$

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0 \quad x \text{ و } y \text{ ریشه های معادله}$$

میباشند :

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} = y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

بدیهیست که برای مرکب نبودن طرف دوم باید $A^2 - B$ مجذور کامل باشد .

XXXVII حل معادله درجه سوم

۲۲۴ - نخست میگوئیم هر معادله کامل درجه سوم را

میتوان بصورت معادله ناقص $x^3 + px + q = 0$ در آورد .
 زیرا اگر در معادله $a_1 X^3 + b_1 X^2 + c_1 X + d_1 = 0$ نخست
 تمام جمل را بر a تقسیم کنیم بصورت $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$
 درخواهد آمد . و چون X را مساوی $x \times u$ فرض نمائیم و
 بجای u مقدار $-\frac{a}{3}$ را قرار دهیم ضریب درجه دوم ازین
 میرود و معادله بصورت $x^3 + px + q = 0$ درمیآید . که

$$\left(p = \frac{3b - a^2}{3} \text{ و } q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27} \right) \text{ در آن}$$

۲۲۵ - تحقیق در عده جوابها - تابع درجه سوم

$y = x^3 + px + q$ ممکنست دارای يك ما کزیمم و يك می نیمم
 باشد که طول آنها ریشه های مشتق $3x^2 + p = 0$ یا $x = \pm \sqrt{-\frac{p}{3}}$

میباشند. شرط وجود ما کزیمم و می نیمم اینست که $p < 0$ باشد .
 اگر این شرط تحقق یابد و مقادیر ما کزیمم و می نیمم
 تابع مختلف علامه باشند منحنی محور x ها را در سه نقطه
 قطع میکند یعنی معادله $x^3 + px + q = 0$ سه جواب دارد
 اما اگر ما کزیمم و می نیمم متحدالعلامه باشند معادله بیش از
 يك جواب نخواهد داشت .

مقدار ما کزیمم و می نیمم چنین اند .

$$M_1 = q + \frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}} \text{ و } M_2 = q - \frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

و حاصلضربشان $q^2 + \frac{4p^3}{27}$ می باشد.

س هرگاه $4p^3 + 27q^2 < 0$ معادله سه جواب دارد

و $4p^3 + 27q^2 = 0$ » دو » (یکی مضاعف)

و $4p^3 + 27q^2 > 0$ » يك »

۲۲۶ - حل معادله $x^3 + px + q = 0$ از راه مثلثاتی

یادآوری می کنیم که $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = \cos 3\varphi$

$$(۱) \quad \cos^3\varphi - \frac{3}{4}\cos\varphi = \frac{1}{4}\cos 3\varphi \quad \text{یا}$$

اکنون در رابطه $x^3 + px = -q$ بجای x مقدار $y\cos\varphi$ را قرار می دهیم تا رابطه

$$(۲) \quad \cos^3\varphi + \frac{p}{y^2}\cos\varphi = -\frac{q}{y^3}$$

$$\text{بدست آید. اگر } \frac{p}{y^2} = -\frac{3}{4} \quad \text{و} \quad -\frac{q}{y^3} = \frac{1}{4}\cos 3\varphi$$

$$\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{27} q}{2\sqrt{p^3}} \quad \text{و} \quad y = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \quad \text{فرض شوند یعنی}$$

باشند معادله (۲) تبدیل بمعادله (۱) میشود.

از روی مقدار $\cos 3\varphi$ نخست سه زاویه 3φ و $2\pi - 3\varphi$

و $2\pi + 3\varphi$ را یافته $\frac{1}{3}$ آنها را در مقدار $\sqrt[3]{-\frac{P}{3}}$ ضرب می

کنیم تا سه جواب معادله $x^3 + px + q = 0$ بدست آیند.
بدیهیست که شرط وجود جواب منفی بودن $4p^3 + 27q^2$ میباشد.

مثال عددی - $x^3 - 4x - 103958 = 0$

$$y = 2\sqrt[3]{-\frac{P}{3}} = \frac{4}{\sqrt[3]{3}} = 230.94$$

$$\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{27}q}{2\sqrt[3]{p^3}} = \frac{\sqrt{27 \times 103958}}{16} = 0.5000$$

پس :

$$\begin{aligned} 3\varphi &= 60^\circ & \varphi_1 &= 20^\circ \\ 2\pi + 3\varphi &= 420^\circ & \varphi_2 &= 140^\circ \\ 2\pi - 3\varphi &= 300^\circ & \varphi_3 &= 100^\circ \end{aligned}$$

$$\cos \varphi_1 = 0.9396 \quad \text{یعنی}$$

$$\cos \varphi_2 = -0.7660 \quad \cos \varphi_3 = -0.1736$$

وبالآخره

$$x_1 = 216.98$$

$$x_2 = -176.89$$

$$x_3 = -0.4009$$

پایان

مثلثات

۱ کلیات

۱ - موضوع - هر مثلث دارای شش جزء (سه ضلع و سه زاویه) است که اگر سه تای آنها را بوضع مناسبی (رجوع شود به هندسه) داشته باشیم میتوانیم سه جزء دیگر را بدست آوریم.

در مثلثات قواعدی گفته میشوند که بكمك آنها از روی اجزاء معلوم اجزاء مثلث را میتوان حساب کرد.

۲ - اندازه قوس - برای اندازه گرفتن قوس دایره (یا زاویه مرکزی مقابل آن) سه واحد بکار میرود:

$$۱) \text{ درجه} = \frac{۱}{۳۶۰} \text{ محیط دایره} = \frac{۱}{۹۰} \text{ زاویه}$$

قائم

$$\text{اجزاء آن : دقیقه} = \frac{۱}{۶۰} \text{ درجه}$$

$$\text{ثانیه} = \frac{۱}{۶۰} \text{ دقیقه} = \frac{۱}{۳۶۰۰} \text{ درجه}$$

$$(۲) \text{ گراد} = \frac{۱}{۴۰۰} \text{ محیط دایره} = \frac{۱}{۱۰۰} \text{ زاویه}$$

قائمه .

$$\text{اجزاء آن : دسی گراد} = \frac{۱}{۱۰} \text{ ، سانتی گراد}$$

$$= \frac{۱}{۱۰۰} \text{ ، میلی گراد} = \frac{۱}{۱۰۰۰} \text{ گراد}$$

(۳) — رادیان - و آن قوسی است از دایره که طولش مساوی شعاع دایره باشد . پس محیط دایره برابر است با ۲ رادیان .

۳ - رابطه بین درجه ، گراد و رادیان
اگر اندازه قوس AB مساوی D درجه و G گراد و R رادیان باشد :

$$\frac{D}{۳۶۰} = \frac{G}{۴۰۰} = \frac{R}{۲\pi}$$

۴ — دایره مثلاثاتی - دایره ایست که شعاع آن مساوی واحد باشد .

۵ — دایره جهت دار - دایره را که جهت مثبت یا منفی آن تعیین شده باشد دایره جهت دار میگویند .

اگر متحرکی از نقطه A واقع بر روی محیط دایره حرکت کند تا بنقطه B برسد گوئیم قوس AB را طی نموده است . A را مبدأ و B را منتهای قوس گویند . ممکن است

محترك پس از حرکت از نقطه A يك يا چند دور محیط دایره را طی کند و در B متوقف شود در این صورت هم متحرك قوس AB را طی کرده است. اگر طول کوچکترین قوس AB مساوی α رادیان باشد :

$$AB = 2K\pi + \alpha$$

(K عددی است صحیح مثبت یا صفر یا منفی)

۶- قضیه شال - اگر نقاط A و B و C و ... و F بر

روی محیط دایره واقع باشند !

$$AB + BC + CD + DF + FA = 2K\pi$$

اگر نقطه M واقع بر محیط دایره مبدأ قوسها، a و b طول های قوسهای MA و MB و نقطه C وسط AB باشد.

$$MC = 2K\pi + \frac{a+b}{2}$$

۷- تعریف - دو قوس را که دارای مبدأ مشترک باشند

قرینه گویند و قتیکه منتهای آن دو نسبت به محوری که از مبدأ مشترک میگذرد قرینه باشند.

مجموع دو قوس قرینه مساویست با $2K$.

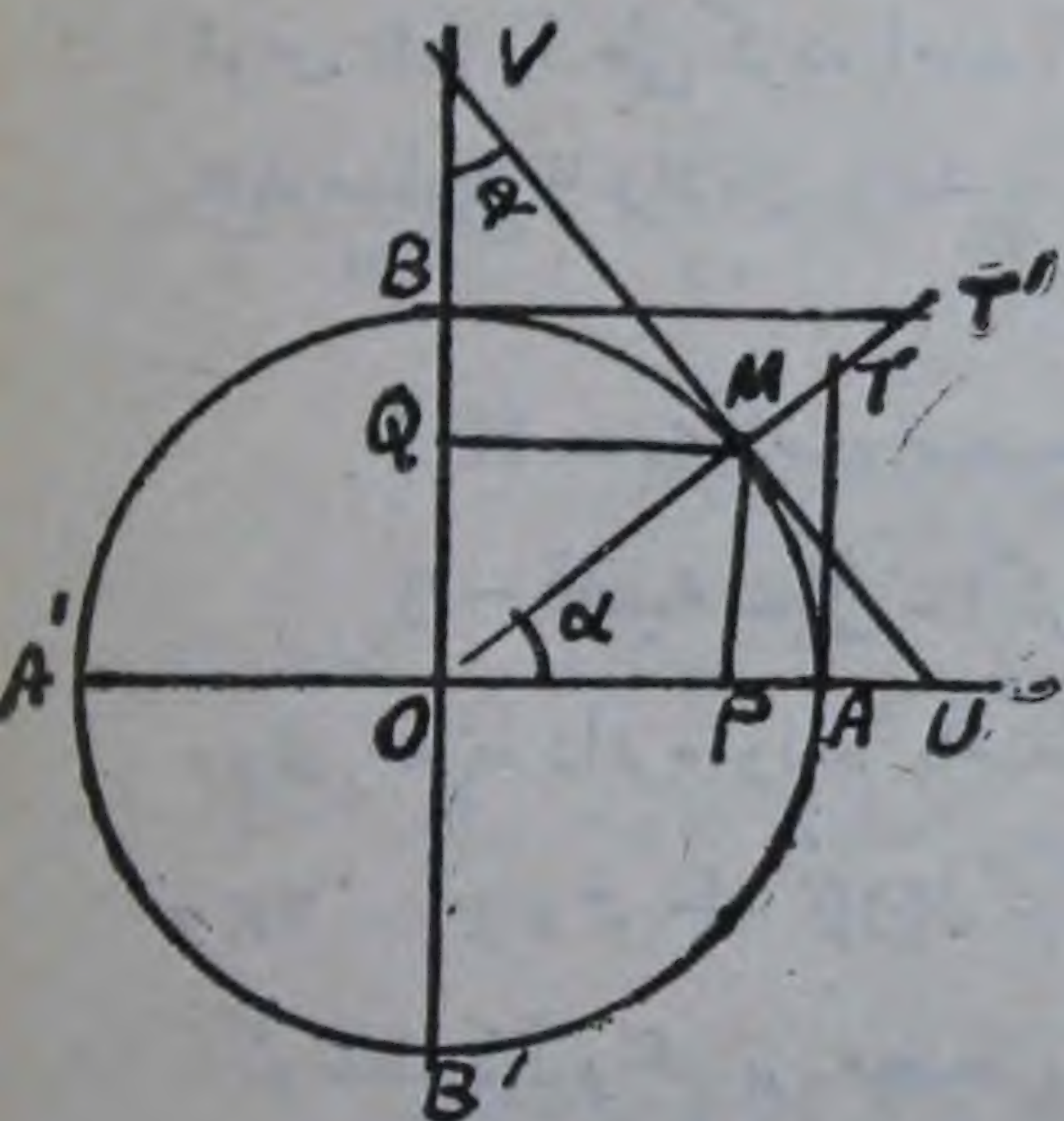
۸- تعریف - دو قوس را متمم گویند و قتیکه مجموع

آنها مساوی ربع دایره یا $\frac{\pi}{2}$ باشد.

۹- تعریف - دو قوس را مکمل گویند وقتی که

مجموعه‌شانات مساوی نصف محیط دایره یا π باشد.

II خطوط مثلثاتی



۱۰ - تعریف - اگر در دایره مثلثاتی قوس $AM = a$ داده شده باشد و AA' قطر مار بر مبداء A و BB' قطر عمود بر آن را رسم کنیم و عمودهای MP و MQ را بر آن دو قطر فرود آوریم و

امتداد شعاع OM مماس در نقطه A را در T و مماس در نقطه B را در T' قطع نماید و مماسی که از M بر دایره رسم شود قطر AA' را در U و BB' را در V تلاقی کند :

(۱) MP را جیب یا سنیوس a (Sinus) علامت اختصاری $\sin a$

(۲) OP را جیب تمام یا کسینوس a (Cosinus) علامت اختصاری $\cos a$

(۳) AT را ظل یا تانژانت a (Tangente) علامت اختصاری $\tan a$

(۴) BT' را ظل تمام یا کتانژانت a (Cotangente) علامت اختصاری $\cot a$

(۵) OU را قاطع یا سکانت a (Secante) علامت اختصاری $\sec a$

(۶) OV را قاطع تمام یا کوسکانت a (cosecante) علامت اختصاری $\operatorname{cosec} a$

مینامند. و هر شش خط را خطوط مثلثاتی قوس a میگویند.

۱۱ - قضیه - وقتی قوس a از 0 تا 360 درجه تغییر نماید:

جیب و جیب تمام آن بین 1 و -1 ، و ظل و ظل تمام وقاطع و قاطع تمام آن بین $-\infty$ و $+\infty$ تغییر مینمایند

۱۲ - روابط بین خطوط مثلثاتی قوس a -

$$(۱) \sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$(۴) \sec a = \frac{1}{\cos a}$$

$$(۲) \operatorname{tga} = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$(۵) \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$$

$$(۳) \operatorname{cotga} = \frac{\cos a}{\sin a}$$

روابطی که از روابط فوق نتیجه میشوند.

$$\cos a = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$$

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

۱۳ - روابط بین خطوط مثلثاتی قوسهائیکه
تفاضل یا مجموعشان مضربی از π باشد. (k عددی
است بزرگتر یا کوچکتر از صفر یا مساوی آن).
۱ - اگر $a - b = k\pi$ (تفاضل دو قوس مضرب
زوج π) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin (2k\pi + b) = \sin b \\ \cos a = \cos (2k\pi + b) = \cos b \\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} (2k\pi + b) = \operatorname{tg} b \end{cases}$$

۲ - اگر $a + b = 2k\pi$ (مجموع دو قوس مضرب زوج
 π) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin (2k\pi - b) = -\sin b \\ \cos a = \cos (2k\pi - b) = \cos b \\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} (2k\pi - b) = -\operatorname{tg} b \end{cases}$$

۳ - اگر $a - b = (2k + 1) \pi$ (تفاضل مضرب
فرد π) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin [(2k + 1) \pi + b] = -\sin b \\ \cos a = \cos [(2k + 1) \pi + b] = -\cos b \\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} [(2k + 1) \pi + b] = \operatorname{tg} b \end{cases}$$

۴ - اگر $a + b = (2k + 1) \pi$ (مجموع مضرب
فرد π) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin [(2k + 1) \pi - b] = \sin b \\ \cos a = \cos [(2k + 1) \pi - b] = -\cos b \\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} [(2k + 1) \pi - b] = -\operatorname{tg} b \end{cases}$$

۱۴- در قوسهای متمم، یعنی اگر $a + b = \frac{\pi}{2}$ باشد:

$$\sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos b$$

$$\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin b$$

$$\operatorname{tga} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \operatorname{cotg} b$$

اگر تفاضل دو قوس يك قائمه باشد $a - b = \frac{\pi}{2}$

$$\sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = \cos b$$

$$\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = -\sin b$$

$$\operatorname{tga} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = -\operatorname{cotg} b$$

۱۵- روابط بین قوسهایی که يك خط مثلثاتی

داشته باشند.

$$\begin{cases} a = 2k\pi + b \\ a + (2k+1)\pi = b \end{cases} : \text{اگر } \sin a = \sin b$$

$$\begin{cases} a = 2k\pi + b \\ a = 2k\pi - b \end{cases} : \text{اگر } \cos a = \cos b$$

$$a = k\pi + b : \text{اگر } \operatorname{tga} = \operatorname{tgb}$$

۱۶ - جدول مثلثاتی برخی قوسهای مهم :

قوس	\sin	\cos	tg	\cotg
۰	۰	۱	۰	∞
$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	۱	۰	∞	۰

۱۷ - دوره تناوب خطوط مثلثاتی

خطوط مثلثاتی توابع متناوب (جبر، شماره ۱۵۲) قوس هستند، دوره تناوب جیب و جیب تمام و قطر ظل و قطر ظل تمام 2π و دوره تناوب ظل و ظل تمام π میباشد.

III - جمع و تفریق و ضرب و تقسیم قوسها

۱۸ - تصویر بر محور - هرگاه a طول قطعه خط

AB و α زاویه آن با جهت مثبت محور و a' تصویر آن بر

محور باشد :

$$a' = a \cos \alpha$$

۱۹ - خطوط مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو قوس

$$\sin (a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b: \text{مجموع}$$

$$\cos (a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg} (a+b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}$$

$$\sin (a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \text{ ب - تفاضل}$$

$$\cos (a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg} (a-b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}$$

۲۰ - مجموع سه قوس:

$$\sin (a+b+c) = \sin [(a+b)+c] =$$

$$\sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b$$

$$- \sin a \sin b \sin c$$

$$\cos (a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c$$

$$- \cos b \sin a \sin c - \cos c \sin a \sin b$$

$$\operatorname{tg} (a+b+c) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} + \operatorname{tgc} - \operatorname{tga} \operatorname{tgb} \operatorname{tgc}}{1 - \operatorname{tga} \operatorname{tgb} - \operatorname{tgb} \operatorname{tgc} - \operatorname{tga} \operatorname{tgc}}$$

۲۱ - خطوط مثلثاتی قوسهایی که مضرب يك

قوس هستند:

۱ - قوسهای دو برابر:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2a = 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \\ \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \end{array} \right.$$

۲ - قوسهای سه برابر:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \\ \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \\ \operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a} \end{array} \right.$$

۳ - قوسهای پنج برابر:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 5a = 5 \sin a - 20 \sin^3 a + 16 \sin^5 a \\ \cos 5a = 16 \cos^5 a - 20 \cos^3 a + 5 \cos a \end{array} \right.$$

۲۲ - خطوط مثلثاتی يك قوس بر حسب ظل نصف آن

$$\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}, \quad \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

۲۳ - خطوط مثلثاتی يك قوس بر حسب جیب دو برابر آن

$$\sin a = \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{1 + \sin 2a} \pm \sqrt{1 - \sin 2a} \right)$$

$$\cos a = \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{1 + \sin 2a} \pm \sqrt{1 - \sin 2a} \right)$$

۲۴- خطوط مثلثاتی يك قوس بر حسب جیب تمام دو برابر آن

$$\sin a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

$$\cos a = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$$

۲۵- محاسبه $\operatorname{tg} a$ بر حسب $\operatorname{tg} 2a$

$$\operatorname{tg} a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2a}}{\operatorname{tg} 2a}$$

IV- لگاریتمی کردن

۲۶- در جبر دیده ایم که لگاریتم حاصلضرب (یا خارج

قسمت) چند مقدار برابر است با مجموع (یا تفاضل) لگاریتم های آنها.

چون در جداول لگاریتم بجای خطوط مثلثاتی قوسهای مختلف لگاریتمهای آن خطوط را داده اند اغلب محتاج با استفاده از لگاریتم خطوط بجای خود آنها هستیم. بنا بر این باید سعی کنیم تا هر جا که ممکن است بجای مجموع یا تفاضل خطوط مثلثاتی حاصلضرب یا خارج قسمت آنها را بدست آوریم. این عمل، یعنی تبدیل مجموع یا تفاضل خطوط مثلثاتی به حاصلضرب یا خارج قسمت، را لگاریتمی کردن یا قابل محاسبه کردن آنها میگویند.

۱۷- تبدیل مجموع یا تفاضل دو خط مثلثاتی

بجاء ضرب :

$$1) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$۲) \cos p + \cos q = ۲ \cos \frac{p+q}{۲} \cos \frac{p-q}{۲}$$

$$۳) \sin p - \sin q = ۲ \sin \frac{p-q}{۲} \cos \frac{p+q}{۲}$$

$$۴) \cos p - \cos q = -۲ \sin \frac{p+q}{۲} \sin \frac{p-q}{۲}$$

$$۵) \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$۶) \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$۷) \cos p - \sin q = ۲ \sin \left(\frac{\pi}{۲} - \frac{p+q}{۲} \right) \cos \left(\frac{\pi}{۲} - \frac{p-q}{۲} \right)$$

$$۸) \sin p + \cos q = ۲ \sin \left(\frac{\pi}{۲} + \frac{p-q}{۲} \right) \cos \left(\frac{p+q}{۲} - \frac{\pi}{۲} \right)$$

$$۹) ۱ + \sin a = ۲ \sin^2 \left(\frac{\pi}{۴} + \frac{a}{۲} \right) = ۲ \cos^2 \left(\frac{\pi}{۴} - \frac{a}{۲} \right)$$

$$۱۰) ۱ - \sin a = ۲ \sin^2 \left(\frac{\pi}{۴} - \frac{a}{۲} \right) = ۲ \cos^2 \left(\frac{\pi}{۴} + \frac{a}{۲} \right)$$

$$۱۱) ۱ + \cos a = ۲ \cos^2 \frac{a}{۲}$$

$$۱۲) ۱ - \cos a = ۲ \sin^2 \frac{a}{۲}$$

۲۸ - تبدیل حاصل ضرب دو خط مثلثاتی به مجموع

یا تفاضل :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos (a-b) - \cos (a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a-b) + \cos (a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a-b) + \sin (a+b)]$$

۲۹ - تبدیل برخی عبارات مثلثاتی بحاصلضرب

(۱) برای تبدیل عبارت $a \cos x + b \sin x$ فرض میکنیم

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi \text{ باشد}$$

$$a \cos x + b \sin x = a \left(\cos x + \frac{b}{a} \sin x \right) \text{ پس}$$

$$= a (\cos x + \operatorname{tg} \varphi \sin x) = \frac{a}{\cos \varphi} \cos (\varphi - x)$$

(۲) برای تبدیل عبارت $a + b$ فرض میکنیم $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \varphi$

باشد: پس

$$a + b = a \left(1 + \frac{b}{a} \right) = a (1 + \operatorname{tg} \varphi) = \frac{a}{\cos \varphi}$$

(۳) برای تبدیل $a - b$ فرض میکنیم $\frac{b}{a} = \sin \varphi$ باشد:

$$a - b = a (1 - \sin \varphi) = a \cos \varphi \text{ پس}$$

$$(۴) \quad \frac{b}{a} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{فرض میکنیم } \varphi \quad \text{برای تبدیل}$$

باشد :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1-tg\varphi}{1+tg\varphi} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \quad \text{پس}$$

$$(۵) \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \quad \text{فرض میکنیم } \varphi \quad \text{برای تبدیل}$$

باشد :

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = tg\frac{\varphi}{2} \quad \text{پس}$$

$$(۶) \quad \text{حل معادله درجه دوم } ax^2 + bx + c = 0$$

از راه مثلثات :

اگر فرض کنیم $x = tg\varphi$ ، معادله باینصورت در میآید

$$(c-a)\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi + c + a = 0$$

برای حل این معادله و تعیین φ مراجعه شود بحل معادلات مثلثاتی (شماره ۳۴)

۷ روابط بین اجزاء مثلث

۳۰ - در مثلث قائم

$$A = \frac{\pi}{2} \quad B + C = \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

$$b = a \sin B = a \cos C = ctg B = a \cotg C \quad (۲)$$

$$c = a \sin C = a \cos B = btg C = b \cotg B \quad (۳)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (۴)$$

$$tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} \quad (۶) \quad tg \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \quad (۵)$$

۳۱ - در مثلث غیر مشخص

(R شعاع دایره محیطی)

$$A + B + C = 2\pi \quad (۱)$$

$$(I \text{ دستگاه}) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (۲)$$

$$II \text{ دستگاه} \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases} \quad (۳)$$

$$III \text{ دستگاه} \quad \begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = a \cos C + c \cos A \\ c = b \cos A + a \cos B \end{cases} \quad (۴)$$

۳۲ - روابط بین اضلاع و زوایای مثلث با شعاع

دوایر محیطی و محاطی

(R شعاع دایره محیطی، r شعاع دایره محاطی، r_a ، r_b و r_c اشعه دوایر محاطی خارج، a و b و c اضلاع، p محیط)

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

$$r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (p-b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

۳۳ - مساحت مثلث

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$S = pr = (p-a) r_a = (p-b) r_b = (p-c) r_c$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{r r_a r_b r_c} \quad S = \frac{abc}{2R}$$

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin A \sin C}{\sin B} \\ = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin C}$$

۳۴ (ارتفاعات مثلث)

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= b \sin C = c \sin B = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A}$$

$$h_b = \frac{1}{b} \sqrt{\dots} = a \sin C = c \sin A = \frac{b \sin A \sin C}{\sin B}$$

$$h_c = \frac{1}{c} \sqrt{\dots} = a \sin B = b \sin A = \frac{c \sin A \sin B}{\sin C}$$

۳۵ - منصف زاویه‌ها - اگر l_a و l_b و l_c منصف

زاویه‌های داخلی A و B و C و λ_a و λ_b و λ_c منصف زاویه

های خارجی آنها باشند :

$$l_a = \frac{1}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)} = \frac{b \sin C}{\cos \frac{B-C}{2}}$$

$$= \frac{c \sin B}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A \cos \frac{B-C}{2}}$$

$$l_b = \dots \quad l_c = \dots$$

$$\lambda_a = \frac{1}{b-c} \sqrt{bc(p-b)(p-c)} =$$

$$\frac{b \sin C}{\sin \frac{B-C}{2}} = \frac{c \sin B}{\sin \frac{B-C}{2}} = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A \sin \frac{B-C}{2}}$$

$$\lambda_b = \dots \quad \lambda_c = \dots$$

۳۶ - میانه‌ها

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

۳۷ - روابط بین اجزاء مختلف

$$h_a = l_a \cos \frac{B-C}{2} = \lambda_a \sin \frac{B-C}{2} \quad (۱)$$

$$h_b = l_b \cos \frac{C-A}{2} = \lambda_b \sin \frac{C-A}{2} \quad (۲)$$

$$h_c = l_c \cos \frac{A-B}{2} = \lambda_c \sin \frac{A-B}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \quad (۴)$$

$$\xi R = r_a + r_b + r_c - r \quad (۵)$$

$$۱۶ R^2 = r^2 + r_b^2 + r_a^2 + r_c^2 + a^2 + b^2 + c^2 \quad (۶)$$

(۷) اگر O مرکز دایره محیطی و I مرکز دایره محاطی و H محل تلاقی ارتفاعات باشد،

$$OH^2 = R^2 (1 - \lambda \cos A \cos B \cos C)$$

$$OI = R(R - 2r)$$

$$abc = \xi prR. \quad (۸)$$

VI معادلات مثلثاتی

۳۸ - معادله مثلثاتی بیان تساوی بین دو عبارتست.

که هر يك شامل يك خط یا چند خط مثلثاتی يك یا چند قوس باشند

و تساوی آنها بازاء برخی از مقادیر این قوسها محقق گردد. این مقادیر را **جواب** های معادله مثلثاتی گویند.

۳۹ - معادله يك مجهولی آنست که فقط يك قوس یا مضارب آن در آن مجهول باشند. اگر مقدار قوسهای مجهول از يك تجاوز کند معادله چند مجهولی خواهد بود.

۱ - **معادله يك مجهولی** - بر دو نوع است :

۴۰ - **نوع اول** - معادله ای که فقط شامل يك خط مثلثاتی قوس مجهول باشد : برای حل آن باید همان خط مثلثاتی را مجهول معاون قرار داد و معادله را بطریق جبری حل نمود. پس بدست آمدن مقدار مجهول قوسهای متناظر با آن خط مثلثاتی جوابهای مسئله آند.

مثلا در معادله $1 - 2 \cos x = 0$ پس از حل $\cos x = \frac{1}{2}$

میشود. پس $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ و در نتیجه $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۴۱ - **نوع دوم** - معادله ای که شامل چندین خط مثلثاتی قوس مجهول باشد :

برای حل آن باید یکی از خطوط مثلثاتی را مجهول معاون قرار داد و سایر خطوط مثلثاتی را بآن خط تبدیل و مطابق حالت اول عمل نمود.

در معادلات نوع دوم برای انتخاب مجهول معاون از قاعده بیوش میتوان استفاده نمود :

۴۲ - **قاعده بیوش Bioche** - ۱ - اگر در معادله ای

قوس x را به $(-x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $\cos x$ را مجهول معاون میگیریم.

۲ - اگر در معادله قوس x را به $(\pi - x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $\sin x$ را مجهول معاون قرار میدهم.

۳ - هرگاه در معادله قوس x را به $(\pi + x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $\tan x$ را مجهول معاون قرار میدهم.

۴ - اگر x را به $(-x)$ و $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$ تبدیل کردیم و در هر سه حال معادله تغییر کرد، باید $\tan \frac{x}{2}$ را مجهول معاون قرار داد.

۴۳ - حل معادلات کلاسیک - غیر از طریق مذکور اغلب ممکن است معادلات مثلثاتی را بکمک دستورات مثلثاتی بر اهائی که آسان تر باشد حل نمود. برای نمونه طریقه حل معادلات معروف بکلاسیک را بیان میکنیم.

(I) - حل معادله کلاسیک $a \sin x + b \cos x = c$

حل ۱ - اگر a و b و c عددی باشند $\frac{b}{a}$ را $\tan \varphi$

فرض میکنیم تا معادله باینصورت در آید.

$$\sin x + \tan \varphi \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi$$

یا

چون طرف دوم مقدار است معلوم $x + \varphi$ و در نتیجه x بدست می آید .

بحث - شرط وجود جواب این است که $\frac{c}{a} \cos^2 \varphi \leq 1$

باشد: یا چون بجای $\cos^2 \varphi$ مقدار آن را بر حسب b و a قرار دهیم:

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

حل ۲ - اگر a و b و c پارامتری باشند $\frac{x}{2} \text{tg}$ را مجهول

معاون انتخاب میکنیم تا معادله (۱) بصورت معادله درجه دوم

$$(b+c) \text{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \text{tg} \frac{x}{2} + c - b = 0$$

در آید که در آن شرط وجود جواب، مثبت یا مساوی صفر بودن مبین است، یعنی

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

(II) حل معادله کلاسیک $a \text{tg} x + b \cot x = c$

حل ۱ - اگر ضرائب a و b و c عددی باشند معادله

مفروض را چنین مینویسیم:

$$a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\sin x} = c$$

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x - c \sin x \cos x = 0 \quad \text{و یا}$$

$$a \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + b \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - c \cdot \frac{\sin 2x}{2} = 0 \quad \text{و یا}$$

$$c \sin^2 x + (a-b) \cos^2 x = a+b \quad \text{یعنی}$$

که مانند مسئله I حل میشود.

حل ۲- اگر لا اقل یکی از ضرایب پارامتری باشند

$tg x$ را مجهول معاون میگیریم و معادله باینصورت درمیآید:

$$a tg^2 x - ctgx + b = 0.$$

III حل معادله کلاسیک

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$$

حل ۱- اگر ضرائب عددی باشند معادله را میتوان

باینصورت نوشت:

$$b \sin^2 x + (c-a) \cos^2 x = d - a - c$$

حل ۲- اگر لا اقل یکی از ضرایب پارامتری باشند

طرف دوم معادله را در $\sin^2 x + \cos^2 x$ ضرب و طرفین معادله

حاصل را بر $\cos^2 x$ تقسیم مینمائیم تا معادله

$$a tg^2 x + b tg x + c = d (1 + tg^2 x)$$

$$(a-d) tg^2 x + b tg x + c - d = 0. \quad \text{و یا}$$

حاصل شود که با آسانی میتوان آنرا حل و بحث نمود.

IV حل معادله کلاسیک $\sin px = \sin qx$

حل- اگر p و q عددی باشند.

$$\begin{cases} px = 2k\pi + qx \\ px = (2k+1)\pi - qx \end{cases}$$

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{p+q} \quad \text{یا} \quad x = \frac{2k\pi}{p-q} \quad \text{یعنی}$$

ب - معادلات چند مجهولی

۴۴ - بدیهیست که بتعداد مجهولها باید معادله داده شده باشد. پس دستگاههای معادلات چند مجهولی خواهیم داشت. برای حل دستگاههای معادلات چند مجهولی مثلثاتی قاعده معینی نمیتوان گفت جز اینکه اصولاً معادلات چند مجهولی با استفاده از قواعد جبری و راه حلهایی که برای حل معادلات یک مجهولی و انتخاب مجهول معاون گفته شده است حل میشوند.

۴۵ - هرگاه در دستگاه علاوه بر خطوط مثلثاتی خود قوسها هم وجود داشته باشند اشکال زیاده‌تر است. تنها در دستگاههای دو مجهولی که مجموع یا تفاضل دو قوس و مجموع، تفاضل، حاصلضرب یا خارج قسمت دو خط داده شده باشند با کمک دستورهای شماره ۲۷ و ۲۸ میتوان مسائل را با آسانی حل کرد. اینک چند نمونه:

I (دستگاههایی که در آن مجموع یا تفاضل دو قوس و مجموع یا تفاضل دو جیب یا دوجیب تمام داده شده باشند:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$$

مثال

از رابطه

$$\sqrt{2} \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{x-y}{2} = s$$

تفاضل $x - y$ ، و از روی مجموع و تفاضل دو مجهول خود آنها را بدست میآوریم.

(II) دستگاههایی که مجموع و تفاضل دو خط مثلثاتی را شامل باشند :

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$$

مثال

هر معادله دستگاه را جداگانه لگاریتمی کرده و حاصل را بهم تقسیم میکنیم نتیجه میشود :

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{b}{a}$$

و از روی آن $x + y$ بدست میآید. آنگاه مقدار $\frac{x+y}{2}$

را در یکی از معادلات لگاریتمی شده دستگاه برده $x - y$ را بدست میآوریم.

(III) مجموع یا تفاضل دو قوس و حاصلضرب دو جیب یا درجیب تمام در دست هستند :

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ \sin x \sin y = p \end{cases}$$

مثال

معادله دوم را بحاصلجمع و تفاضل قوسها تبدیل کرده
از روی آن $x - y$ را بدست میآوریم .

IV - علاوه بر مجموع یا تفاضل دو قوس خارج قسمت دو
در خط از یکتووع در دست هستند :

$$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{\sin x}{\sin y} = q \end{cases}$$

مثال

معادله دوم را ترکیب و تفصیل نسبت میکنیم :

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \cot \operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \frac{q + 1}{q - 1}$$

پس $x - y$ بدست میآید .

V - اگر علاوه بر مجموع یا تفاضل دو قوس مجموع،

تفاضل، حاصلضرب یا خارج قسمت دو ظل یا دو ظل تمام آنها
داده شده باشند مسئله با مختصر تصرفی مانند نمونه‌های I تا

IV قابل حل میشود .

$$\begin{cases} x + y = a \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = s \end{cases}$$

مثال

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} =$$

$$\frac{\sin(x + y)}{\frac{1}{2} \left[\cos \frac{x + y}{2} + \cos \frac{x - y}{2} \right]} = \frac{2 \sin a}{\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{x - y}{2}}$$

از $\cos \frac{x-y}{2}$ میتوان $x-y$ را بدست آورد.

VII نامعادلات مثلثاتی

۴۶ - برای حل نامعادله مثلثاتی باید طریقه حل نامعادلات جبری را بکاربرد یعنی جمیع جمل را بیکطرف نامعادله نقل کرد و پس از انجام اعمال لازم عبارت را بحاصل ضرب عوامل تجزیه و علامت هر عامل را در فواصل جوابها تحقیق کرد و از مقایسه علامت، جوابهای نامعادله را تعیین نمود.

مثال - برای حل نامعادله $2\sin x - \sqrt{3} > 0$ و قتیکه

$0 < x < 2\pi$ باشد ابتدا آن را مساوی صفر قرار میدهیم و

جوابهایش را که عبارتند از $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{2\pi}{3}$ (جوابهای

بین صفر و 2π) بدست آورده جدول ذیل را تشکیل میدهیم:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	2π
$2\sin x - \sqrt{3}$	$-$	0	$+$	$-$
نا معادله	جواب ندارد	جواب دارد	جواب ندارد	جواب ندارد

پس نا معادله بازاء $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ صادق است.

VIII حل مثلث

۴۷ - حل مثلث یعنی بدست آوردن اجزاء مجهول آن

از روی اجزاء معلوم بوسیله محاسبه .

۴۸ - اگر اجزاء معلوم از اجزاء اصلی مثلث (اضلاع و زوایا) باشند میگویند يك حالت کلاسیك است و اگر از اجزاء فرعی (اشعه دواير ، ارتفاعات و مانند آنها) باشند، يك حالت غير کلاسیك .

۴۹ - روابط بین اجزاء اصلی مثلث قائم در شماره ۳۰ (۱ تا ۳) و روابط بین اجزاء اصلی مثلث غیر مشخص در شماره ۳۱ (دستگاہهای I و II و III) گفته شده است . و نیز روابط بین سایر اجزاء مثلثها در شماره های ۳۲ تا ۳۷ درج گردیده اند .

۵۰ - تعادل دستگاہها - در هر مثلث دستگاہهای I و II و III (شماره ۳۱) متعادلند یعنی هر يك را میتوان از روی دیگری بدست آورد .

مثلا برای بدست آوردن دستگاہ II از دستگاہ I باین طریق عمل میکنیم :

$$A = \pi - (B + C)$$

$$\sin^2 A = \sin^2 (B + C) = \sin^2 B \cos^2 C + \cos^2 B \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos B \cos C$$

$$= \sin^2 B (1 - \sin^2 C) + \sin^2 C (1 - \sin^2 B) + 2 \sin B \sin C \cos B \cos C$$

$$= \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos (B + C)$$

$$= \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \cos B \cos C \cos A$$

و چون بجای $\sin A$ و $\sin B$ و $\sin C$ بترتیب مقادیرشان

$\frac{a}{2R}$ و $\frac{b}{2R}$ و $\frac{c}{2R}$ را که از دستگاه I بدست می‌آیند قرار دهیم رابطه اول دستگاه II نتیجه میشود.

۵۱ - حل مثلث قائم در حالات کلاسیک

اجزاء معلوم	اجزاء مجهول	فرمولهائی که باید بکاربرد
حالت اول a, B	c, b, C	$C = 90^\circ - B$ $b = a \sin B$ $c = a \cos B$
حالت دوم b, B	c, a, C	$C = 90^\circ - B$ $c = b \cot B$ $a = \frac{b}{\sin B}$
حالت سوم b, a	c, C, B	$\sin B = \frac{b}{a}$ $C = 90^\circ - B$ $c = a \sin B$
حالت چهارم c, b	a, C, B	$\tan B = \frac{b}{c}$ $C = 90^\circ - B$ $a = \frac{b}{\sin B}$

۵۲ - حل مثلث غیر قائم در حالات کلاسیک

فرمول‌هایی که باید به کار برد	اجزاء معلوم	اجزاء مجهول	
$A = \pi - (B + C)$ $b = a \frac{\sin B}{\sin A}$ $c = a \frac{\sin C}{\sin A}$	c, a, B	b, A, c	حالت اول
$\begin{cases} \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a} \\ B + A = \pi - C \end{cases}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	b, C, a	A, c, B	حالت دوم
$\sin B = \frac{b}{a} \sin A$ $C = \pi - (A + B)$ $c = a \cos B + b \cos A$	A, b, a	C, B, c	حالت سوم
$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ $\sin B = \frac{b}{c} \sin C$ $A = \pi - (B + C)$	c, b, a	C, B, A	حالت چهارم

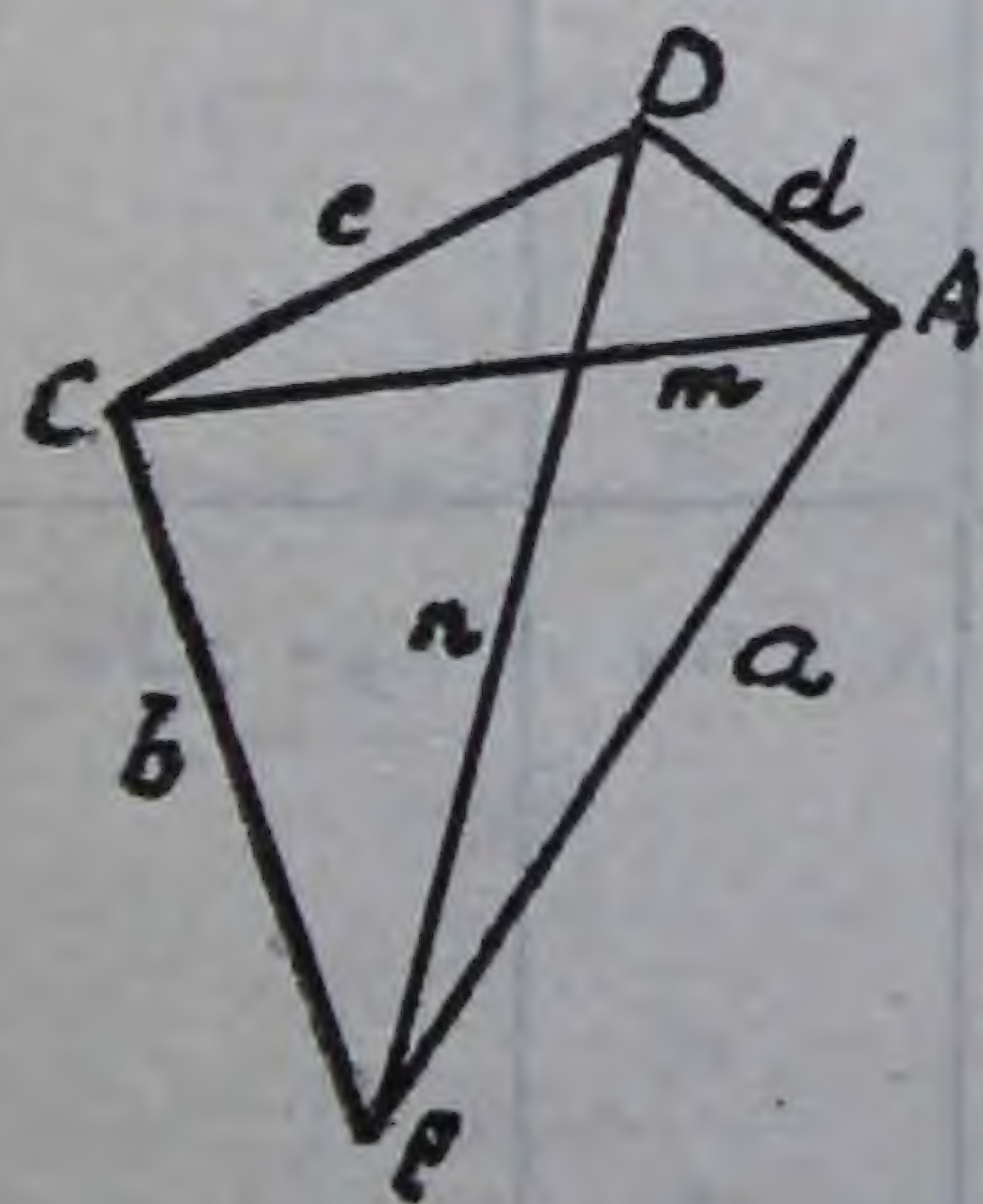
۵۳ - حل مثلث در حالات غیر کلاسیک - این حالات

بسیار متنوعند و بطور کلی قاعده‌ای برای آنها نمیتوان گفت فقط دو نکته اساسی ذیل خاطر نشان میشوند.

۱ - در حل و بحث مسائل بهتر است که از محاسبه زوایا شروع شود، زیرا اضلاع از روی زوایا به آسانی بدست می‌آیند.

۲ - هر جا مجموع دو مجهول معلوم باشد خوبست تفاضل آن دو را نیز بدست آورد تا به آسانی بتوان آن‌ها را پیدا کرد.

IX - چهار برهای گوش



(ش ۲)

۵۴ - هر چهار بر گوش (محدب) چهار ضلع و چهار زاویه دارد که بفرض معلوم بودن پنج‌تای آنها، بشرط آنکه اقلاً دوتای آنها ضلع باشند، میتوان چهار بر را حل و رسم کرد. در چهار بر $ABCD$ (ش ۲) زوایا را به A و B و C و D و اضلاع را a و b و c و d نمایش میدهند.

برای محاسبه اجزاء مجهول چهار بر از روی اجزاء معلوم آن، آنرا بوسیله رسم دو قطر به مثلثها تجزیه میکنیم و اجزاء مجهول را حساب مینمائیم.

۵۵ - مسئله. از چهار بری چهار ضلع و یک زاویه معلومست. زوایای دیگر را حساب کنید.

چون اقطار را m و n بنامیم (ش ۲) :
 در مثلث DAB میتوان n را حساب کرد (شماره ۵۲ ،
 حالت دوم) و از روی آن زاویه C را بدست آورد (شماره ۵۲
 حالت چهارم) . و نیز از حل دو مثلث ADB و DCB زوایای ADB
 و CDB که مجموعشان زاویه D است بدست میآیند و زاویه B
 از رابطه $A+B+C+D=2\pi$ (هندسه) نتیجه میشود .

۵۶ - روابط بین اجزاء چهار بر محاطی

$$A+C=B+D=\pi \quad \text{۱ - زوایا}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{cotg} \frac{D}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}$$

$$m = \sqrt{\frac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+dc}} \quad \text{۲ - اقطار}$$

$$n = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

$$mn = ac + bd$$

$$\frac{m}{n} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad \text{۳ - مساحت}$$

$$R = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{4S}} \quad \text{۴ - شعاع دایره محیطی}$$

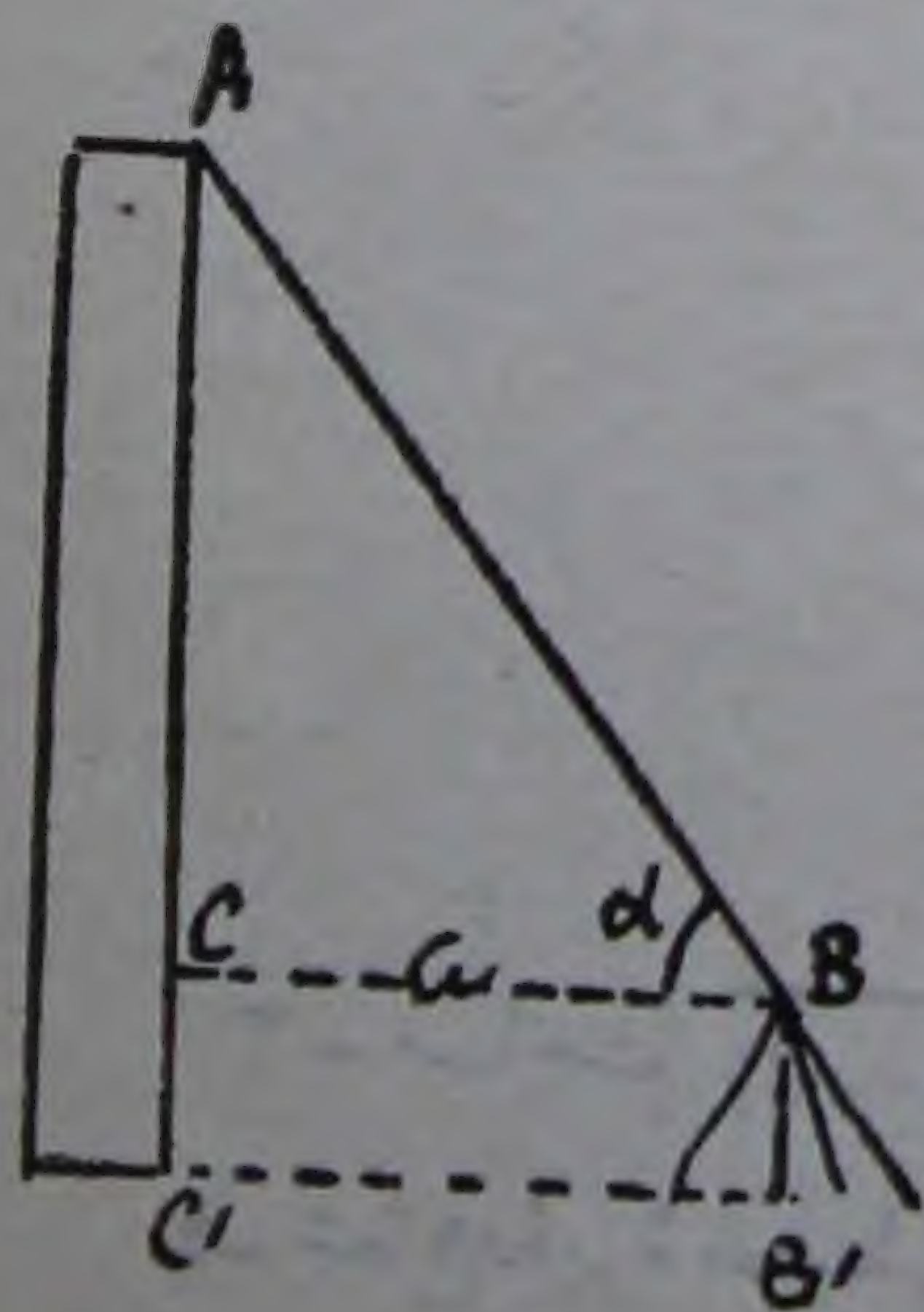
$$\sin \alpha = \frac{2S}{mn}$$

۵ - زاویه بین دو قطر

x - استعمال مثلثات در نقشه برداری

۵۷ - در نقشه برداری از يك قطعه زمین میتوان طول خطوط و مقدار زوایا را با ژنجیر مساحی و زاویه یاب و افزار دیگر اندازه گرفت. ولی برای مراعات دقت زمین را به مثلثهای متعدد تقسیم میکنند و بوسیله حل آن مثلثها اجزاء آن را با کمال دقت اندازه می گیرند. این عمل را **مثلث بندی** یا **Triangulation** می گویند.

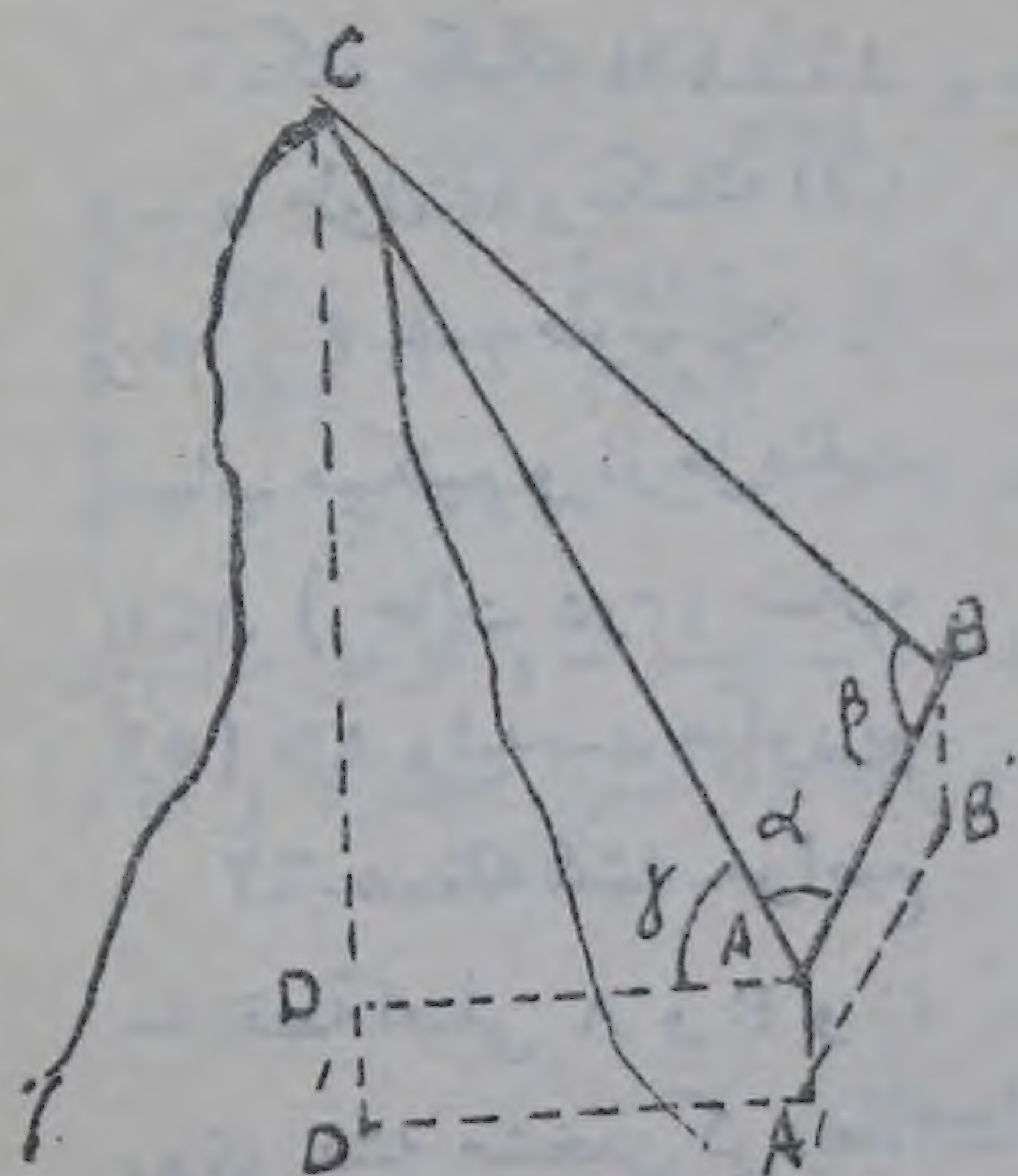
۵۸ - گاهی نیز اندازه گرفتن فاصله بین دو نقطه که در دسترس نیستند یا اندازه گرفتن ارتفاعی لازم می آید. این مسائل بطریق ذیل حل میشوند.



۵۹ - **تعیین ارتفاع - ۱** اگر بموقع قائمی که بر نقطه ای که می خواهیم ارتفاعش را تعیین کنیم دسترسی داشته باشیم (شکل ۳) $B'C' = BC$ را با دقت اندازه می گیریم و از حل مثلث ABC ارتفاع نقطه A را بدست می آوریم.

(۲) اگر بموقع قائم دسترسی

شکل ۳

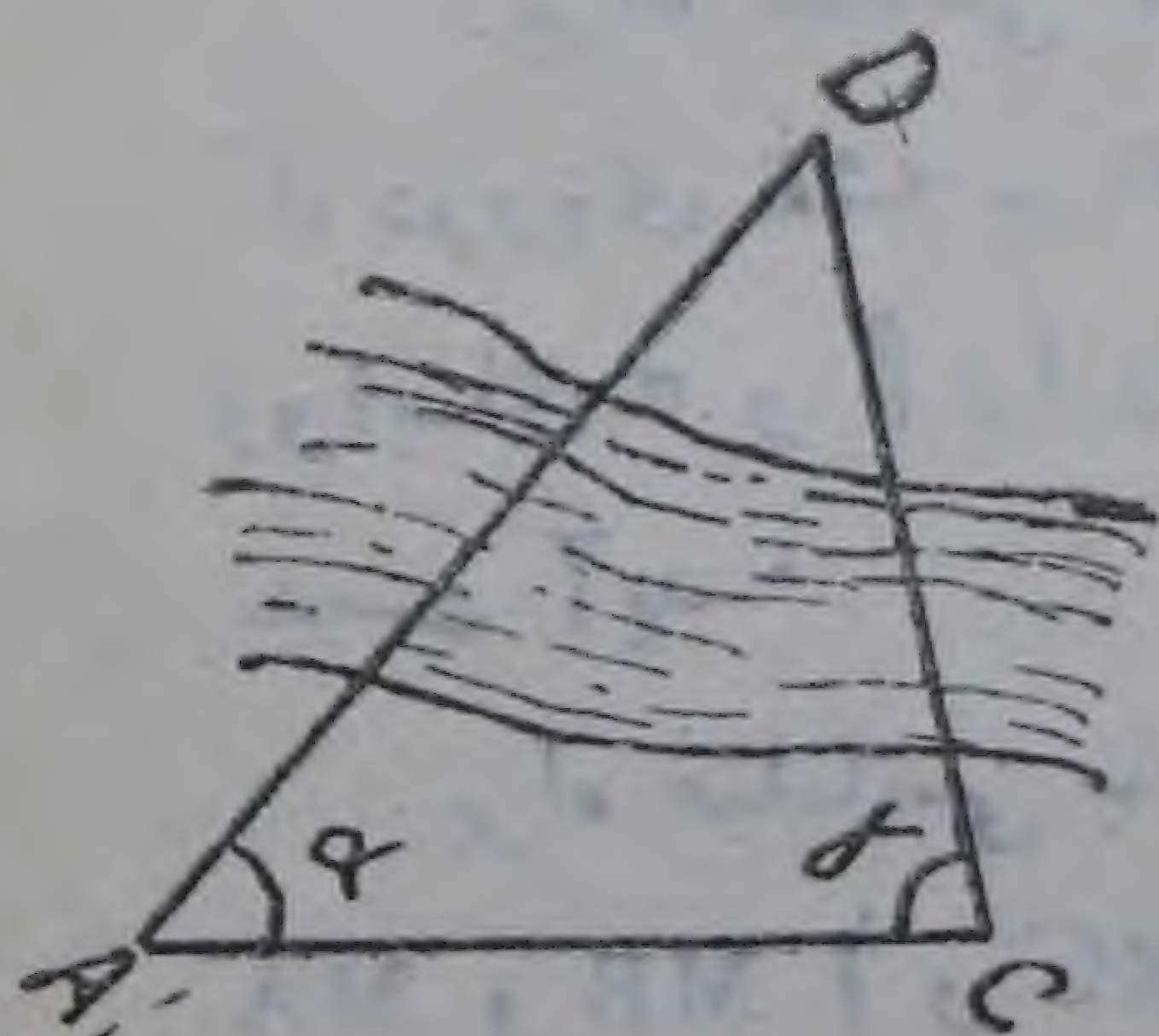


نباشد (ش ۳) طول AB را در روی زمین مسطحی بدقت اندازه میگیریم و زوایای α و β را هم زاویه یاب تعیین می - کنیم؛ از حل مثلث ABC طول AC بدست میآید، آنگاه مثلث قائم CAD را با وتر AC و زاویه

γ حل میکنیم تا CD (و در نتیجه CD') بدست آید (DD' مساوی ارتفاع زاویه یاب از سطح زمین است)

۶۰ - فاصله نقطه A را از

D که در دسترس نیست معلوم کنید •



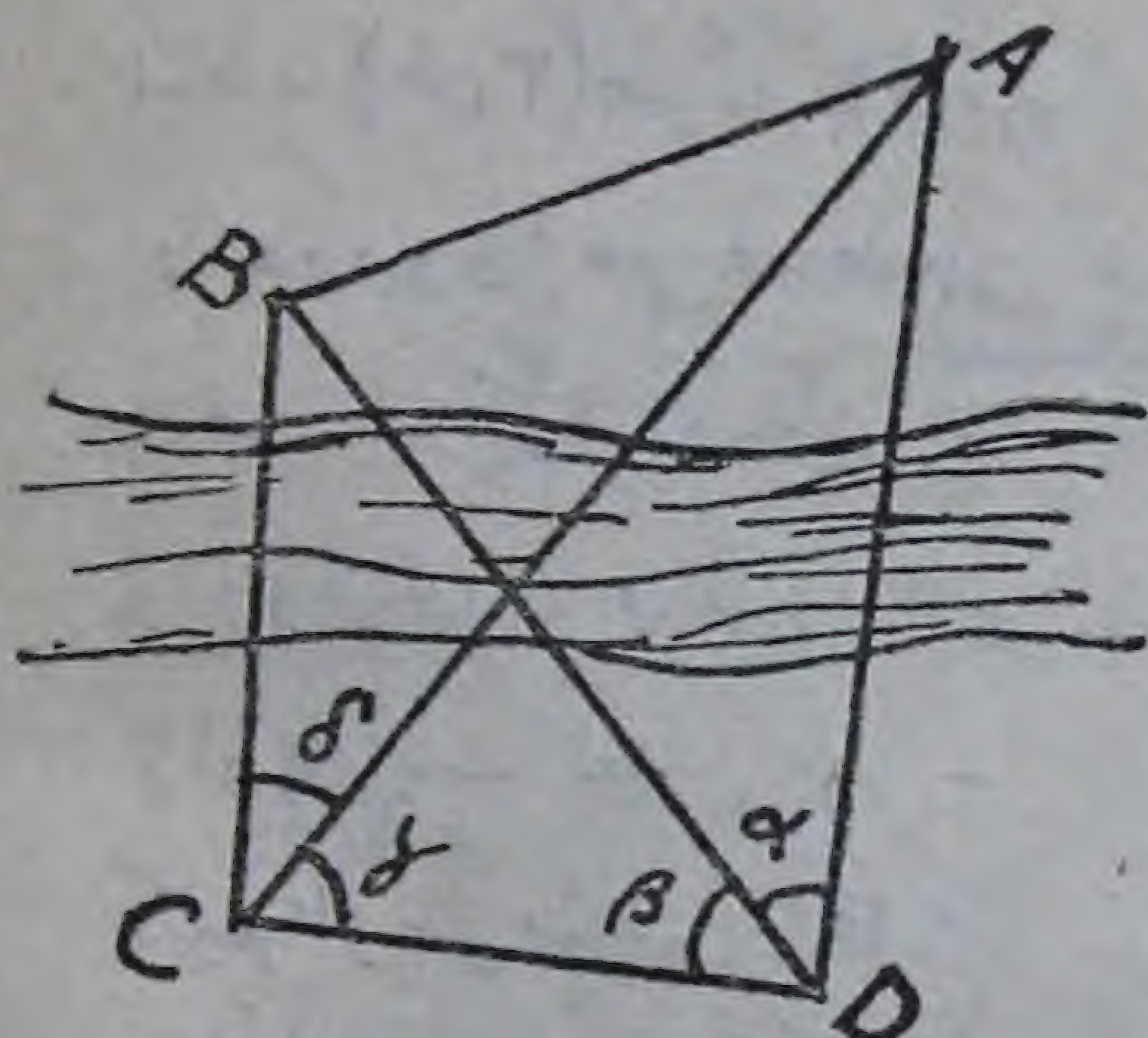
نقطه ای مانند C در نظر گرفته فاصله AC و زوایای α و β (ش ۴) را اندازه میگیریم و مثلث ADC

را حل میکنیم (حالت اول، شماره ۵۲)

۶۱ - اگر به A و B هیچیک دسترسی نباشد (ش ۵)

دو نقطه C و D را در نظر گرفته فاصله CD و زوایای α و

β و γ را اندازه میگیریم •



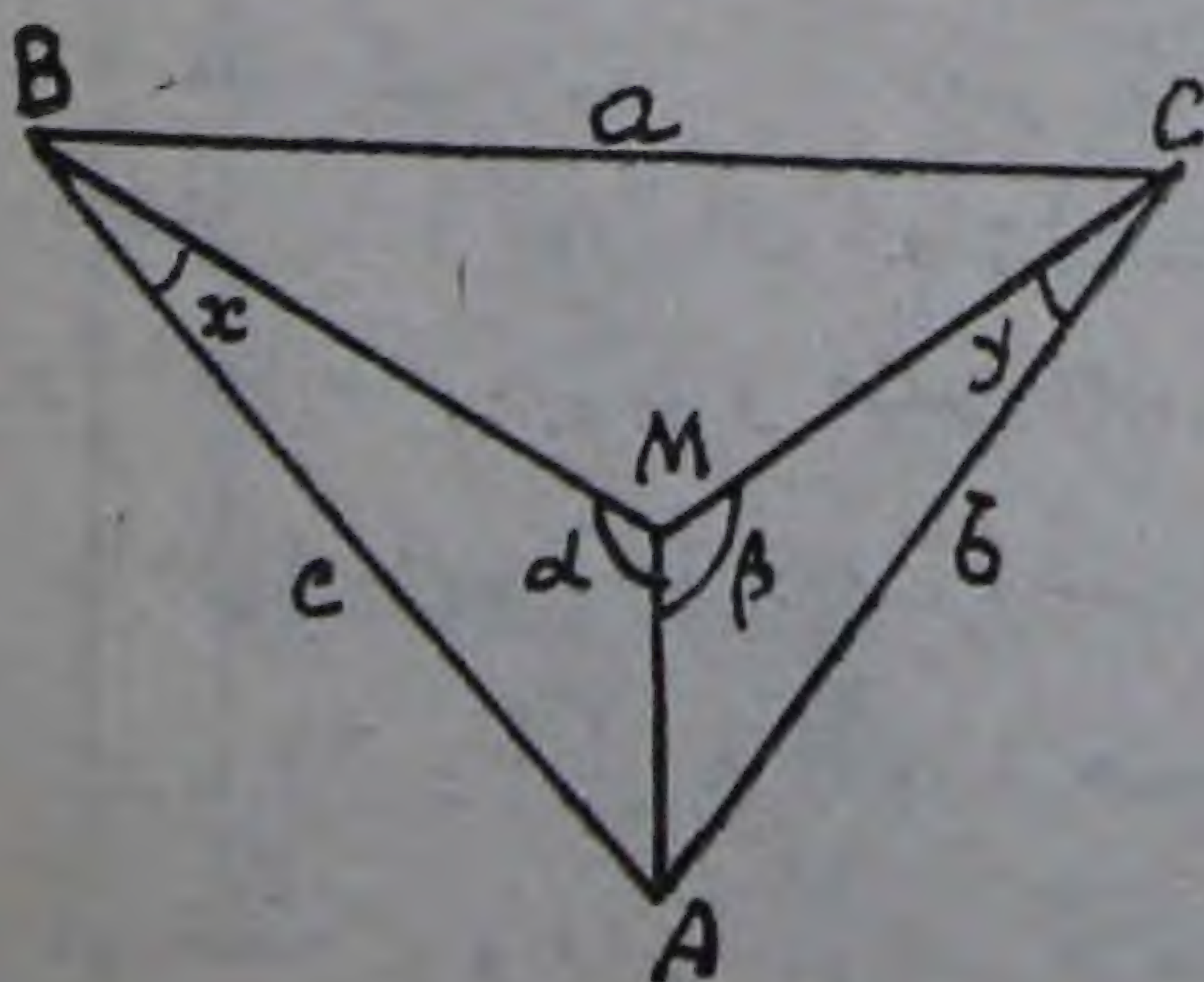
شکل ۵

آنگاه بکمک CD و γ و $\alpha + \beta$ طول AC و بکمک CD و β و $\delta + \gamma$ طول BC را حساب میکنیم و از حل مثلث ACB (حالت دوم، شماره ۵۲) AB را بدست میآوریم
۶۲- مسئله نقشه-مواضع

سه نقطه اصلی A و B و C

روی نقشه مشخص گردیده اند، میخواهیم وضع نقطه M را در روی نقشه معین نمائیم در صورتیکه میدانیم از M قطعه AB بزاویه α و قطعه AC بزاویه β دیده میشود (ش ۶)

براه هندسی میتوان این مسئله را حل کرد باین معنی که در روی نقشه بر AB و CD بترتیب قطعه دایره های حاوی زوایای α و β را رسم نمود تا از نقاط عشارت نقطه M بدست آید.



شکل ۶

براه مثلثاتی باید MA و MB (و MC) را حساب کرد- برای این کار از معلوم بودن اجزاء مثلث ABC استفاده میکنیم.
دو مثلث AMB و AMC :

$$\frac{MA}{\sin x} = \frac{c}{\sin \alpha} \quad \text{و} \quad \frac{MA}{\sin y} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{c \sin \beta} \\ x + y = 2\pi - \alpha - \beta - A \end{cases}$$

از دستگاه اخیر x و y حساب میشوند و از حل مثلثهای AMB و AMC میتوان MB و MC را تعیین کرد و M را بدست آورد.

پایان

I تعاریف

- ۱ - جسم چیزیست که قسمتی از فضا را اشغال کند .
مقداری از فضا را که جسم اشغال میکند **حجم** آن ، فصل مشترک دو مشترک دو جسم یا حد هر جسم را **سطح** ، فصل مشترک دو سطح یا حد هر سطح یا **خط** ، فصل مشترک دو خط یا حد هر خط را **نقطه** گویند .
 - ۲ - **خط مستقیم** ساده ترین خطها و نامحدود است .
نیم خط از یک طرف و **قطعه خط** از دو طرف محدود میباشند .
 - ۳ - **صفحه** یا **سطح مستوی** ساده ترین سطوح و آن نیز نامحدود است .
 - ۴ - دو خط یا دو صفحه موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمیکنند .
 - ۵ - **دایره** خط منحنی بسته ایست که همه تقاطش از یک نقطه بنام مرکز بفاصله ثابتی بنام شعاع باشند .
 - ۶ - **حکم** عبارتست از بیان یک فرض و یک مستنبط .
- اصل متعارفی** حکمیست که بی دلیل واضح باشد . **اصل موضوع** حکمیست که تعبد پذیرفته شود . **قضیه** حکمیست که اثباتش محتاج باقامه **برهان** باشد .

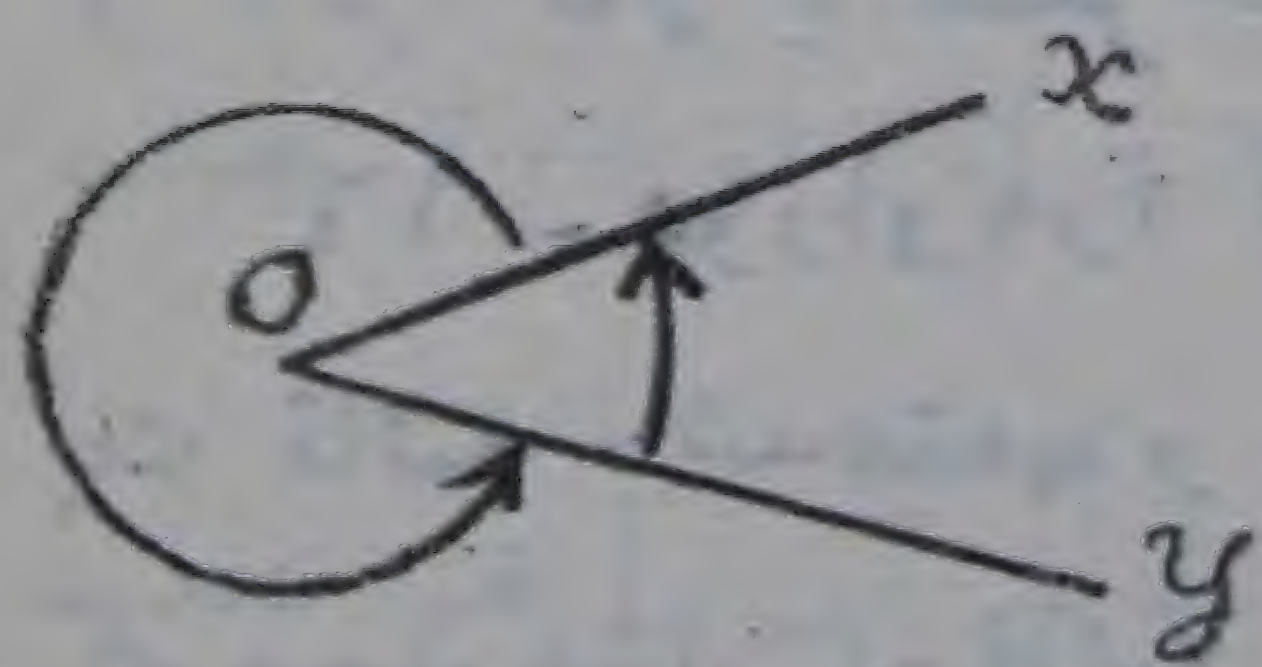
۷ - حقایق هندسی مبتنی بر سه اصل ذیل هستند :

- (۱) برد و نقطه فقط يك خط میگذرد (۲) از يك نقطه فقط يك خط موازی خط دیگر میگذرد (اصل موضوع اقلیدس) .
(۳) هر شکل را میتوان در صفحه یا فضا جابجا کرد بی آنکه در آن تغییری پیدا شود .

۸ - مکان هندسی عبارتست از مجموع نقاطی که همه يك خاصیت هندسی داشته باشند .

II - زوایا و خطوط عمود بر هم

- ۹ - زاویه یا گوشه قسمتی از صفحه است که بین دو نیم خط متقاطع محصور باشد . نقطه تلاقی دو خط را **تارک** یا **راس** و هر خط را **پهلویاضلع** گویند . هر دو نیم خط با یکدیگر دو زاویه میسازند، آنرا \sphericalangle ، کوچکتر است (و معمولاً مراد از زاویه همانست) **گوژ** یا **محدب** و دیگری را **کاو** یا **مقعر** گویند (ش ۱)



ش ۱

- ۱۰ - ممکنست در صفحه جهت مثبت و منفی قائل شد . مثلاً جهت دوران عقربه های ساعت را منفی و جهت مخالف دوران عقربه ها را مثبت

فرض کرد . در اینصورت زاویه هم مثبت یا منفی تواند بود . اگر يك ضلع برای اینکه بضلع دیگر نزدیک شود در جهت مثبت دوران کند زاویه مثبت است و گرنه منفی (درش ۱ xoy)

منفی و yox مثبت است) .

۱۱ - قضیه - از يك نقطه فقط میتوان يك عمود بر

خطی رسم کرد .

۱۲ - نتیجه - خطوط عمود بر يك خط باهم موازیند .

۱۳ - اندازه زاویه - زاویه را با درجه و گراد

و رادیان اندازه میگیرند . (رجوع شود بقسمت مثلثات ،

شماره ۲ ، صفحه ۱۲۹)

۱۴ - دو زاویه مجاور يك ضلع مشترك دارند .

در زاویه مجاور که اضلاع غیر مشترکشان بر يك امتداد باشند

مجاوب نام دارند . دو زاویه متقابل آنند که اضلاعشان بر يك

استقامت باشند .

۱۵ - اگر دو زاویه مجانب باهم برابر باشند هر يك

را قائمه یا راست و ضلع مشترکشان را بر ضلع دیگر عمود

مینامند . زاویه کوچکتر از قائمه را تند یا حاده و بزرگتر

ز آنها باز یا منفرجه میگویند .

۱۶ - دو زاویه را که مجموعشان

يك قائمه باشد متتام و دو زاویه را

که مجموعشان دو قائمه باشد مکمل

گویند .

۱۷ - هر گاه دایره ای در نظر

گرفته شود : زاویه مرکز آن

است که تارکش بر مرکز دایره



(ش ۲)

باشد (MON)، گوشه محاطی رأسش بر محیط دایره است (ABC)، يك ضلع گوشه ظلی بر دایره مماس است (TAC) راس زاویه درونی در داخل دایره (EFG) و رأس زاویه بیرونی خارج دایره (LKH) است. در گوشه محاطی ABC قوس BAC را حاوی زاویه ABC گویند.

اندازه زاویه مرکزی قوس مقابل آنست: $\text{MON} = \text{ق MN}$

» » » » محاطی نصف » » $\text{ABC} = \frac{1}{2} \text{ق AC}$

» » » » ظلی » » » $\text{TAC} = \frac{1}{2} \text{ق AC}$

» » درونی نصف مجموع دو قوس مقابل آنست:

$$\text{EFG} = \frac{1}{2} (\text{ق EG} + \text{ق E'G'})$$

اندازه زاویه بیرونی نصف تفاضل دو قوس مقابل آنست:

$$\text{LKH} = \frac{1}{2} (\text{ق LH} - \text{ق L'H'})$$

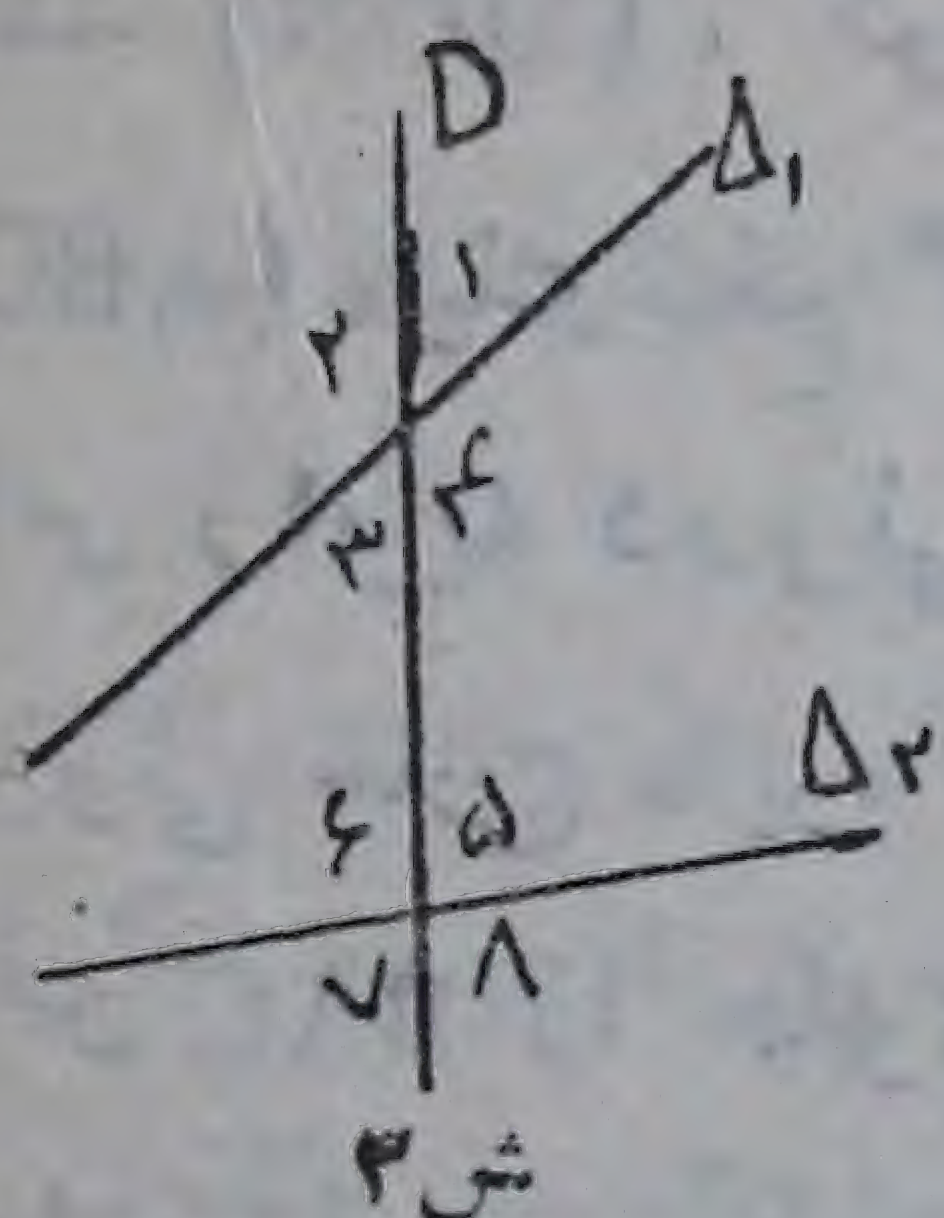
۱۸ - نیمساز زاویه خطی است که زاویه را نصف میکند.

۱۹ - نیمساز هر زاویه زاویه متقابل آن را هم نصف میکند.

۲۰ - نیمسازهای دو زاویه مجانب بر هم عمودند.

۲۱ - نیمساز زاویه مکان هندسی نقاطی است که از دو

ضلع زاویه يك فاصله باشند.



۲۱- اگر دو خط Δ_1 و Δ_2 را خط

سوم D قطع کند (ش ۳) هشت زاویه حادث میشود:

دو زاویه غیر مجاور را که در یک

طرف D باشند متقابل و دو زاویه

را که در دو طرف D باشند متبادل

گویند؛ دو زاویه را که بین Δ_1 و Δ_2 باشند درونی و زاویه های خارج Δ_1 و Δ_2 را بیرونی نامند.

۲۲ - قضیه - اگر دو خط موازی را خط سومی قطع

کند دو زاویه متبادل همنام باهم برابرند.

۲۳ - قضیه عکس - اگر دو خط را خط سومی قطع

کند و دو زاویه متبادل همنام باهم برابر باشند دو خط اول با یکدیگر موازیند.

۲۴ - حالات برابری زوایا

قضیه - دو زاویه که اضلاعشان با یکدیگر موازی باشند برابر یا مکملند.

قضیه - دو زاویه که اضلاعشان بر یکدیگر عمود باشند برابر یا مکملند.

قضیه - دو زاویه متقابل برآس باهم برابرند.

III چند برها

۲۵ - شکل حادث از تقاطع چند خط را چند بر

گویند. هر خط را يك ضلع یا پهلو و محل تقاطع دو ضلع را

تارك یا **رأس** مینامند. اگر امتداد هیچیک از اضلاع شکل را قطع نکند چند بر را **گوژ** و **گر نه گاو** نامند. چند بر منظم آنست که همه زوایایش باهم و همه اضلاعش باهم مساوی باشند. زاویه بین هر دو ضلع يك زاویه درونی و آنکه بین يك ضلع و امتداد ضلع دیگر باشد زاویه بیرونی نام دارد. در چند بر منظم يك نقطه میتوان یافت که از همه اضلاع بيك فاصله باشد، این نقطه را مرکز مینامند. خطی را که از مرکز بر یکی از اضلاع عمود شود ارتفاع *Apothème* میگویند.

مجموع طولهای اضلاع محیط یا **پیرامون** است. قطر خطی است که دو تارك غیر مجاور را بهم ربط دهد.

۲۷ - قضیه - مجموع زوایای درونی چند بر n ضلعی $(2n-4)$ قائمه است.

۲۷ - قضیه - مجموع زوایای بیرونی هر چند بر چهار قائمه است.

۲۸ - قضیه - تعداد اقطار چند بر n ضلعی $\frac{n(n-3)}{2}$

است.

IV مثلث

۲۹ - مثلث ساده ترین چند برهاست. اگر دو ضلع آن مساوی باشند **مساوی الساقین** و هر يك از دو ضلع مساوی را **ساق** و اگر هر سه ضلع مساوی باشند **مساوی الاضلاع** است.

اگر يك زاویه آن قائمه باشد قائم است و ضلع مقابل بزایه قائمه را وتر گویند. میانه خطی است که از رأس بوسط ضلع مقابل وصل شود. ارتفاع عمود است که از رأس بر ضلع مقابل فرود آید. عمود منصف خطی است که بوسط يك ضلع عمود گردد.

دایره محیطی آنست که بر سه رأس بگذرد. دایره محاطی بر سه ضلع مماس میباشد. دایره محاط خارج هر ضلع آنست که بر آن ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس باشد. ۳۰ - قرار داد. در این کتاب هر زاویه مثلث را با يك حرف بزرگ و ضلع مقابل آنرا با همان حرف ولی كوچك میخوانیم.

ارتفاعات وارد بر اضلاع a و b و c را h_a و h_b و h_c ؛ میانه‌های آن اضلاع را m_a و m_b و m_c ؛ شعاع دایره محیطی را R ، از آن دایره محاطی را r و اشعه دوایر محاط بر اضلاع a و b و c را r_a و r_b و r_c و مساحت مثلث را S مینامیم.

در سه بر متساوی الساقین رأس مشترك دوساق را A نام میگذارند و آنرا بطور مطلق راس میگویند. در مثلث قائم رأس زاویه قائمه را A مینامند. محیط مثلث یعنی $a+b+c$ را $2p$ میگویند.

۳۱ - قضیه - مجموع زوایای مثلث ۲ قائمه است.

۳۲ - قضیه - در مثلث هر ضلع کوچکتر است از مجموع و

بزرگتر است از تفاضل دو ضلع دیگر .

$$b - c < a < b + c$$

۳۳ - قضیه - در مثلث متساوی الساقین برأس A

$$b = c \quad \text{و} \quad \angle B = \angle C$$

۳۴ - قضیه - در مثلث متساوی الساقین میانه‌های وارد بر

دو ساق با هم برابرند ؛ همچنین ارتفاعهای وارد بر ساقها و نیمساز گوشه‌های مجاور دو ساق .

۳۵ - قضیه - در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر

قاعده میانه قاعده و نیمساز زاویه رأس هم هست .

۳۶ - قضیه - در مثلث متساوی الاضلاع :

$$a = b = c \quad \text{و} \quad \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

۳۷ - قضیه - در مثلث متساوی الاضلاع سه ارتفاع با هم

مساویند .

حالات برابری مثلثها

۳۸ - قضیه - دو مثلث در این حالات با هم برابرند :

(۱) اگر دو ضلع و زاویه بین آنها در آن دو مثلث نظیر بنظر

مساوی باشند .

(۲) اگر دو زاویه و ضلع بین آنها در آن دو مثلث نظیر بنظر

مساوی باشند .

(۳) اگر سه ضلع آنها نظیر بنظر مساوی باشند .

(۴) اگر دو ضلع و زاویه مقابل بضلع بزرگتر در آن دو مثلث

نظیر بنظر مساوی باشند .

۳۹ - قضیه - اوساط اضلاع مثلث ، مواقع ارتفاعات وارد بر اضلاع و وسط هر قطعه از ارتفاع واقع بین رأس و محل تلاقی ارتفاعات نه نقطه اند واقع بر روی يك دایره (دایره نه نقطه) .

تناسب و تشابه

۴۰ - قضیه طالس - خطی که موازی يك ضلع مثلث رسم شود دو ضلع دیگر را بر يك نسبت قطع میکند .

بعکس - خطی که دو ضلع مثلث را بقطعات متناظر متناسب تقسیم کند موازی ضلع سوم است .

۴۱ - قضیه . خطی که اوساط دو ضلع مثلث را بهم ربط دهد موازی ضلع سوم و مساوی نصف آنست .

۴۲ - تعریف - دو شکل را مشابه یا همانند گویند وقتی که اضلاع متناظرشان متناسب و زوایای متناظرشان مساوی باشند .

۴۳ - قضیه - دوسه بر در این احوال باهم مشابهند :

۱ - وقتی دو زاویه یکی نظیر بنظیر بادو زاویه دیگری برابر باشند :

$$\angle A = \angle A' \quad \angle B = \angle B'$$

۲ - يك زاویه یکی با يك زاویه دیگری مساوی بوده

و اضلاع آن دو زاویه با یکدیگر متناسب باشند :

$$\angle A = \angle A' \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

۳ - سه ضلع آنها متناسب باشند .

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

۴ - دو ضلعشان متناسب و زاویه مقابل بضلع بزرگتر در

هر دو مساوی باشد .

۵ - اضلاعشان بترتیب برهم عمود یا باهم موازی باشند

خواص منصف زاویه

۴۴ - قضیه - منصف (نیمساز) هر زاویه داخلی ضلع

مقابل را بنسبت دو ضلع دیگر تقسیم میکند .

۴۵ - قضیه - همچنین نیمساز هر زاویه بیرونی .

۴۶ - قضیه - محل برخورد نیمسازهای داخلی و خارجی

با يك ضلع مثلث نسبت بدوانتهای این ضلع مزدوج توافقی یکدیگرند . (یعنی اگر نقاط مذکور را M و M' و دو راس را B و C بنامیم :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{M'B}{M'C}$$

۴۷ - قضیه - در دو مثلث مشابه ، ارتفاعات وارد بر

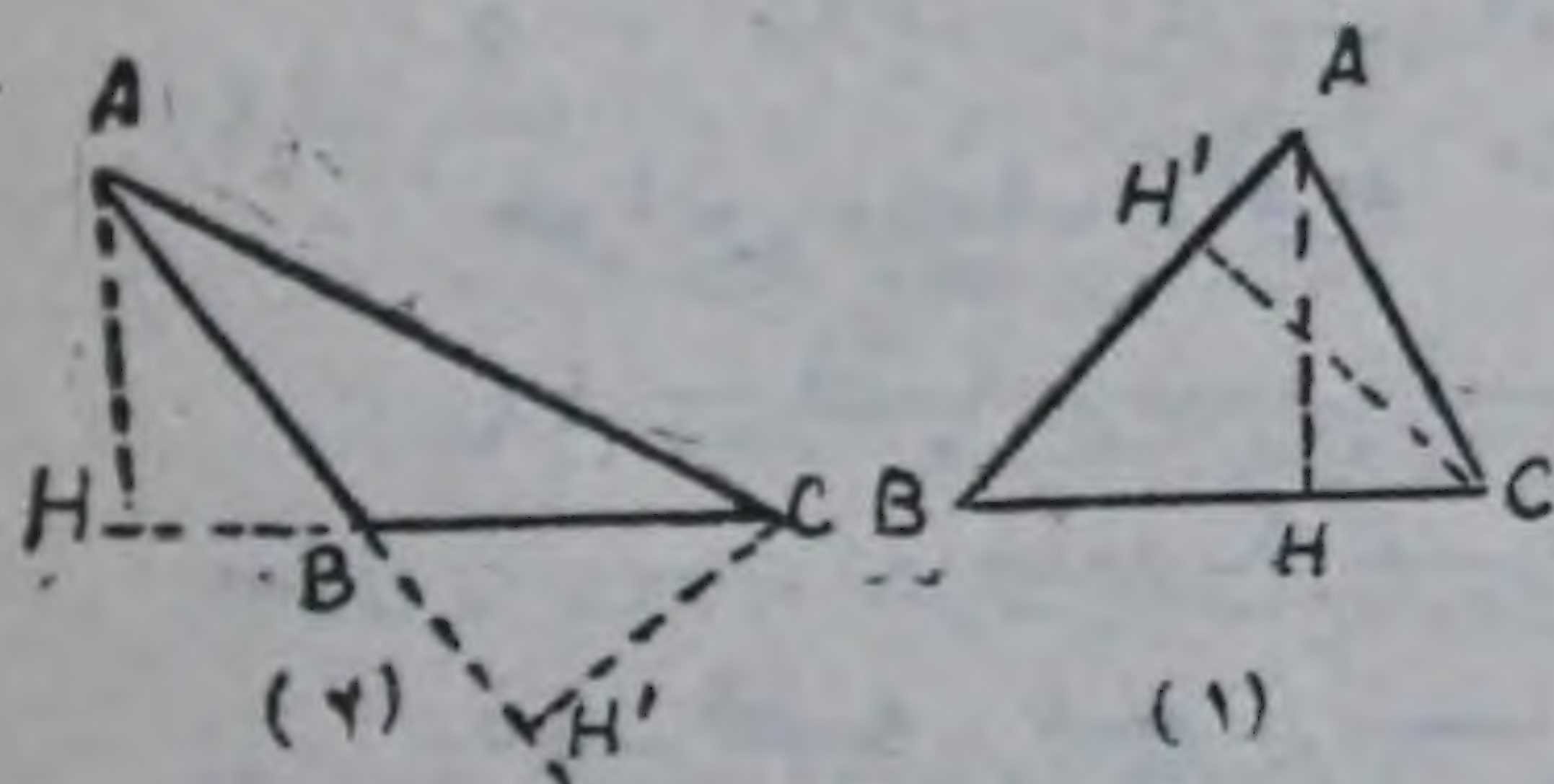
ضلعهای متناظر ، نیمسازهای زوایای متناظر و سایر خطوط متناظر مانند شعاعهای دایره محیطی و محاطی بر نسبت تشابه دو شکلند .

۴۸ - قضیه - مساحات دو مثلث که يك زاویه مساوی

داشته باشند بر نسبت حاصلضربهای اضلاع آن زاویه است .

۴۹ - قضیه - در دو مثلث مشابه مساحات بر نسبت مربع اضلاع متناظرند .

۵۰ - قضیه - در هر مثلث مربع ضلع متقابل بزاویه حاده (منفرجه) مساویست با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای (باضافه) دو برابر حاصلضرب یکی از آنها در تصویر ضلع دیگر بر آن



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BH$$

$$= a^2 + c^2 - 2c \cdot BH'$$

(ش ۳ و ۴)

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2a \cdot BH$$

$$= a^2 + c^2 + 2c \cdot BH'$$

(ش ۳ و ۴)

۵۱ - قضیه - مجموع مربعات دو ضلع مثلث مساوی دو برابر مربع نصف ضلع سوم باضافه دو برابر مربع میانه وارد بر این ضلع است .

نتیجه - مکان هندسی نقاطی که مجموع مربعات فواصلشان از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد محیط دایره ایست که مرکز آن بر وسط خط واصل بین نقاط مفروض واقع است

۵۲ - قضیه - تفاضل مربعات دو ضلع مثلث مساویست بدو برابر حاصلضرب ضلع سوم در تصویر میانه همین ضلع بر خود آن .

نتیجه - مکان هندسی نقاطی که تفاضل مربعات فواصلشان از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد خطی است عمود بر خط

واصل بین آن دو نقطه .

۵۳ - قضیه استوارت Stewart - اگر نقطه D بر

روی ضلع BC از سه بر ABC اختیار گردد :

$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot CD \cdot DB.$$

روابط بین اجزاء مختلف مثلث :

(۵۴) ارتفاعات :

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

قطعاتی از اضلاع که بوسیله ارتفاعات جدا میشوند :

$$BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad \text{و} \quad H = C \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$CH' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \quad \text{و} \quad H'A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$AH = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad \text{و} \quad H''B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$$

۵۵ - منصف زاویه‌ها - فرض میکنیم AD و BD' و

CD'' سه منصف الزاویه‌های داخلی و AD, و BD', و CD''

منصف الزاویه‌های خارجی مثلث ABC باشند :
 اولاً طول قطعاتی از اضلاع که بوسیله منصف الزاویه
 های داخلی جدا شده‌اند عبارتند از :

$$\overline{BD} = \frac{ac}{b+c} \quad \text{و} \quad \overline{DC} = \frac{ab}{b+c}$$

$$\overline{CD'} = \frac{ab}{c+a} \quad \text{و} \quad \overline{D'A} = \frac{bc}{c+a}$$

$$\overline{AD''} = \frac{bc}{a+b} \quad \text{و} \quad \overline{D''B} = \frac{ca}{a+b}$$

ثانیاً طول قطعات هر یک از اضلاع جدا شده بوسیله
 منصف الزاویه‌های خارجی عبارتند از :

$$\overline{D \setminus B} = \frac{ac}{b-c} \quad \text{و} \quad \overline{D \setminus C} = \frac{ab}{b-c}$$

$$\overline{D' \setminus C} = \frac{ab}{c-a} \quad \text{و} \quad \overline{D' \setminus A} = \frac{bc}{c-a}$$

$$\overline{D'' \setminus A} = \frac{bc}{a-b} \quad \text{و} \quad \overline{D'' \setminus B} = \frac{ac}{a-b}$$

ثالثاً طول هر یک از منصف الزاویه‌های داخلی عبارتست از

$$AD = \sqrt{bc \left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right]} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$$

$$BD' = \sqrt{ca \left[1 - \frac{b^2}{(c+a)^2} \right]} = \frac{2}{c+a} \sqrt{cap(p-b)}$$

$$CD'' = \sqrt{ab \left[1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right]} = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}$$

رابعاً طول هریک از منصف الزاویه‌های خارجی عبارتست از :

$$AD_1 = \sqrt{bc \left[\frac{a^2}{(b-c)^2} - 1 \right]} = \frac{2}{b-c} \sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

$$BD'_1 = \sqrt{ca \left[\frac{b^2}{(c-a)^2} - 1 \right]} = \frac{2}{c-a} \sqrt{ca(p-c)(p-a)}$$

$$CD''_1 = \sqrt{ab \left[\frac{c^2}{(a-b)^2} - 1 \right]} = \frac{2}{a-b} \sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

۵۶ - میانه‌ها

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$$

$$m_b = \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}}$$

$$m_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

۵ - دایره‌های محیطی، محاطی و محاط خارج

$$R = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{ab}{2h_c}$$

$$= \frac{abc}{\Delta S} = \frac{abc}{\Delta \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$r = \frac{\Delta}{a+b+c} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

قطعات محدود بین رؤس و نقاط تماس دایره محاطی:

$$\text{قطعه بین راس } A \text{ و نقطه تماس} = p - a$$

$$\text{» » } B \text{ » » » } = p - b$$

$$\text{» » } C \text{ » » » } = p - c$$

قطعات محدود بین رؤس و نقاط تماس دوایر محاط خارج:

$$\text{قطعه بین } A \text{ و دایره محاط خارجی ضلع } a = p$$

$$\text{» » » } B \text{ » } = p - c$$

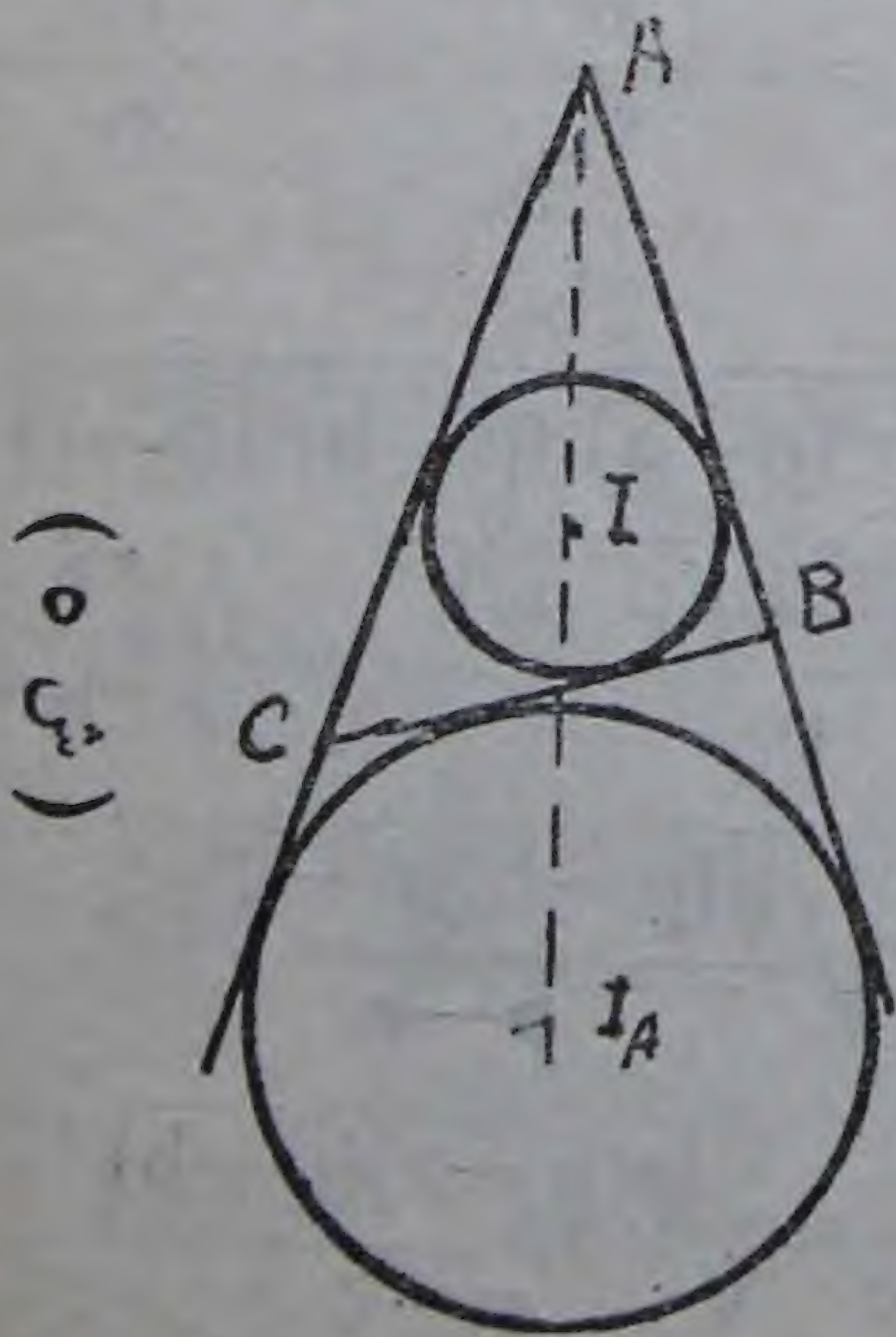
$$\text{» » » } C \text{ » } = p - b$$

قطعاتی بر روی منصف زاویه رأس A که بین مراکز

دوایر و رأس A محصورند: (ش ۵)

$$AI = \sqrt{bc \frac{p-a}{p}}$$

$$AI_a = \sqrt{\frac{pbc}{p-a}}$$



۵۸ - قضیه - حاصل ضرب دو ضلع

مثلث مساویست با (۱) حاصل

ضرب قطعاتی که منصف زاویه

درونی بر روی ضلع سوم جدا

میکند، باضافه مربع این منصف

زاویه (۲) با حاصل ضرب قطعاتی

ی منصف زاویه بیرونی بر روی

ضلع مقابل جدا میکند، منهای

مربع این منصف زاویه.

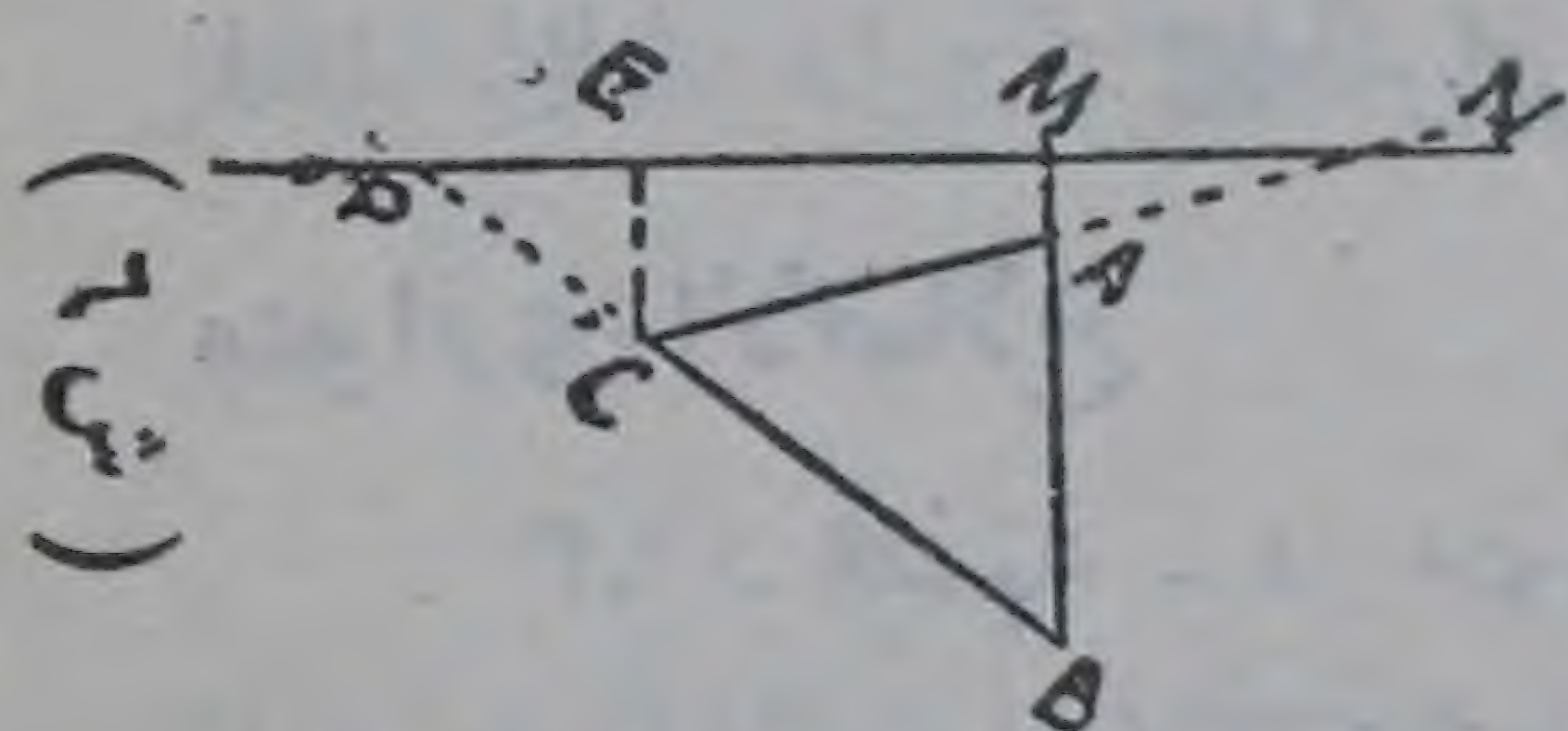
۵۹ - قضیه - مواقع منصف زوایای خارجی مثلث سه نقطه اند واقع بر يك استقامت .

موربات

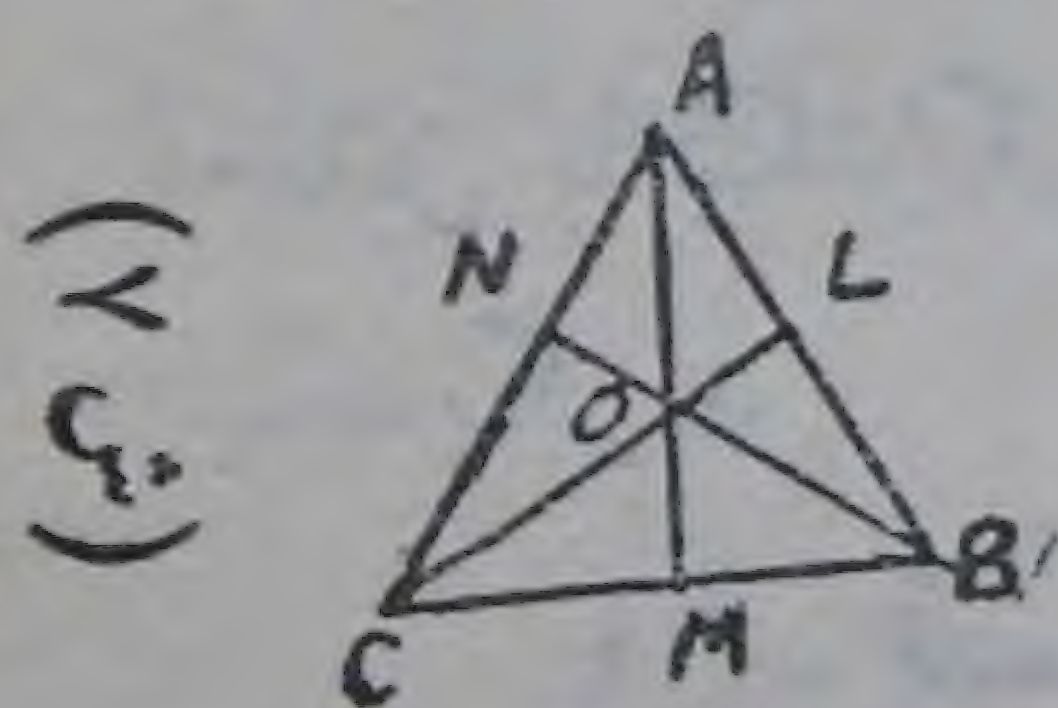
۶۰ - قضیه منلائوس - هر گاه مورب \triangle سه ضلع مثلث ABC (یا امتداد آنها) را در M و N و P قطع کند (ش ۶)

$$\frac{MA}{MC} \cdot \frac{PC}{PB} \cdot \frac{NB}{NA} = 1$$

۶۱ - قضیه سوا - هر گاه سه رأس مثلث ABC را



به نقطه O واقع در صفحه آن وصل نموده امتداد دهیم تا اضلاع مقابل را در M و N و P قطع کنند (ش ۷)



$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$

v چهار بر (یا چهار ضلعی)

۶۲ - چهار بر های مهم - هر چهار بری که هر دو ضلع

مقابل آن با یکدیگر موازی باشند متوازی الاضلاع است . در متوازی الاضلاع هر ضلع را میتوان قاعده دانست و عمودی را که از راس مقابل بر آن فرود آید ارتفاع مینامند .

راستگوشه یا مستطیل متواری الاضلاعی است که يك زاویه آن قائمه باشد ؛ لوزی یا معين متوازی الاضلاعی است که دو

ضلع مجاورش با هم مساوی باشند . مربع مستطیلی است که لوزی هم باشد . دوزنقه شکلی است که دو ضلع آن با هم موازی ، و دو ضلع دیگرش ناموازی باشند ؛ دو ضلع موازی را دو قاعده و عمود مشترك بین آنها را ارتفاع دوزنقه گویند . **چهار برمحاطی** آنست که بتوان دایره‌ای بر چهار راسش گذراند . **چهار برمحیطی** آنست که بتوان دایره‌ای بر چهار ضلعش مماس کرد . هرگاه اضلاع مقابل چهار بر $ABCD$ یکدیگر را در E و F قطع کنند شکل $ABCDEF$ را يك چهار بر کامل مینامند .

متوازی الاضلاع

۶۳ - قضیه - در متوازی الاضلاع (۱) هر دو ضلع مقابل با هم مساویند . (۲) دو قطر منصف یکدیگرند . (۳) دوزاویه مقابل با یکدیگر مساویند . (۴) دو زاویه مجاور مکمل یکدیگرند .

۶۴ - قضیه عکس - اگر در چهار بری (۱) هر دو ضلع با هم مساوی و موازی باشند ؛ (۲) دو قطر منصف هم باشند ؛ (۳) دوزاویه مقابل با یکدیگر مساوی باشند ؛ (۴) دوزاویه مجاور مکمل هم باشند ؛ شکل متوازی الاضلاع است .

۶۵ - قضیه - محل برخورد قطرهای متوازی الاضلاع مرکز تقارن شکل است .

۶۶ - قضیه - مساحت متوازی الاضلاع مساویست بحاصل ضرب قاعده در ارتفاع .

لوزی

- ۶۷ - قضیه - در لوزی دو قطر بر هم عمودند .
- ۶۸ - قضیه - اگر در متوازی الاضلاع دو قطر بر هم عمود باشند شکل لوزیست .
- ۶۹ - قضیه - اگر دو قطر چهار بری بر هم عمود و منصف هم باشند شکل لوزیست .
- ۷۰ - قضیه - هر يك از دو قطر لوزی يك محور تقارن شكل است .
- ۷۱ - قضیه - مساحت لوزی مساویست با نصف حاصل ضرب دو قطر .

مستطیل و مربع

- ۷۲ - قضیه - در مستطیل دو قطر با یکدیگر برابرند .
- ۷۳ - عکس قضیه - اگر دو قطر متوازی الاضلاع مساوی باشند شکل مستطیل است .

دوزنقه

- ۷۴ - قضیه - خطی که اوساط دو ساق (اضلاع ناموازی) دوزنقه را بهم وصل کند موازی قاعده و مساوی نصف مجموع دو قاعده است .

- ۷۵ - قضیه - در دوزنقه متساوی الساقین : ۱) زوایای مجاور بهر قاعده برابرند . ۲) دو قطر با هم مساویند .

- ۷۶ - قضیه - خطی که از محل برخورد دو قطر دوزنقه موازی قاعده رسم شود بوسیله دو ساق بدو جزء مساوی

تقسیم میشود .

۷۷ - قضیه - مساحت دوزنقه مساویست با حاصلضرب ارتفاع در نصف مجموع دو قاعده .

چهار بر محیطی

۷۸ - قضیه - در چهار بر محیطی مجموع هر دو ضلع مقابل مساویست با مجموع دو ضلع دیگر .

۷۹ - عکس قضیه - اگر مجموع دو ضلع مقابل یک چهار بر گوژ مساوی مجموع دو ضلع دیگر باشد شکل قابل محیط شدن بردایره است .

چهار بر محاطی

۸۰ - قضیه - در چهار محاطی زوایای مقابل مکمل یکدیگرند .

۸۱ - اگر در چهار بر محاطی اضلاع را بترتیب a و b و c و d و اقطار را m و n و محیط را $2p$ بنامیم :

قضیه بطالمیوس :

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bd}{ab + cd}$$

$$m \cdot n = ac + bd$$

$$m = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}$$

$$n = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + ba)}{ad + bc}}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \text{ مساحت}$$

$$\text{شعاع دایره محیطی} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

چهار بر کامل

۸۲ - قضیه Gauss - اوساط قطر چهار بر کامل بر يك امتدادند .

۸۳ - قضیه پا پوس - در هر چهار بر کامل هر قطر بوسیله دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم میشود .

IV چند برهای منتظم

۸۴ - تعریف - در چند بر منتظم همه اضلاع با هم و همه زوایا با هم برابرند .

۸۵ - قضیه - چند بر منتظم قابل محاط شدن در دایره و محیط شدن بر دایره است .

۸۶ - قضیه - هر گاه محیط دایره را به n جزء مساوی تقسیم نماییم (۱) از وصل کردن نقاط تقسیم n بر منتظم محاطی بدست میآید (۲) از تقاطع مماسهایی که بر نقاط تقسیم رسم شوند n بر منتظم محیطی بدست میآید (۳) اگر نقاط تقسیم را m به m بهم وصل کنیم m بر منتظم کوکبی حاصل میشود . تعداد چند برهای منتظم m کوکبی مساویست با عده اعداد کوچکتر از $\frac{n}{2}$ که نسبت به m اول باشند .

هر گاه ضلع n بر محاطی را C_n و از آن n بر محیطی

را A_n و شعاع دایره را R و عمودی را که از مرکز چند بر

محاطی بر ضلع فرود میآید (یعنی ارتفاع $apothème$) را a بنامیم این روابط را خواهیم داشت :

۸۸ - محاسبه C_{2n} بر حسب C_n :

$$C_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - C_n^2})}$$

۸۸ - محاسبه A_n بر حسب C_n :

$$A_n = \frac{2RC_n}{\sqrt{4R^2 - C_n^2}}$$

۸۹ - محاسبه A_{2n} بر حسب A_n :

$$A_{2n} = \frac{2A_n R}{2R + \sqrt{4R^2 + A_n^2}}$$

۹۰ - محاسبه a_n بر حسب C_n :

$$a_n = \frac{\sqrt{4R^2 - C_n^2}}{2}$$

۹۱ - ضلع و ارتفاع چند بر منتظم :

$$C_3 = R\sqrt{3} \quad a_3 = \frac{R}{2} \quad ۱ - سه بر$$

$$C_4 = R\sqrt{2} \quad a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \quad ۲ - مربع$$

۳ - پنج بر

$$C_5 = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}; a_5 = \frac{R}{4} (\sqrt{5+1})$$

$$C_6 = R; a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}; \text{ شش بر:}$$

۵ - ده بر:

$$C_{10} = \frac{R}{2} (\sqrt{5-1}) \quad a_{10} = \frac{R}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

۶ - پانزده بر:

$$C_{15} = \frac{R}{4} (\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3})$$

۹۲ - اگر r شعاع دایره محیطی و a ارتفاع n بر

منتظمی که محیطش p باشد و r' شعاع و a ارتفاع $2n$ بر منتظمی که محیط آن نیز همان p باشد، بین چهار مقدار a و r و a و r' این روابط برقرار است:

$$a = \frac{a+r}{2} \quad r = \sqrt{\frac{r(a+r)}{2}}$$

۹۳ - قضیه - مساحت چند بر منتظم برابرست با حاصل ضرب نصف محیط در ارتفاع آن.

۹۴ - قاعده - برای بدست آوردن مساحت چند بر

نامنتظم آنرا بوسیله رسم قطرهای بسه برها و ذوزنقه‌ها تقسیم میکنیم و مساحت‌های اجزاء آنرا بیکدیگر میافزائیم.

VII دایره

- ۹۵ - قضیه - هر قطر محور تقارن دایره است .
- ۹۶ - قضیه - خط مستقیم دایره را فقط در دو نقطه قطع میکند .
- تبصره - اگر دو نقطه بر هم منطبق شوند خط را بر دایره مماس گویند .

اوضاع نسبی دو دایره

- ۹۷ - دو دایره ممکن است متخارج ، مماس خارج ، متقاطع ، مماس داخل یا متداخل باشند . فاصله مرکز دو دایره را بعد المرکزین میگویند و به d نمایش میدهند .

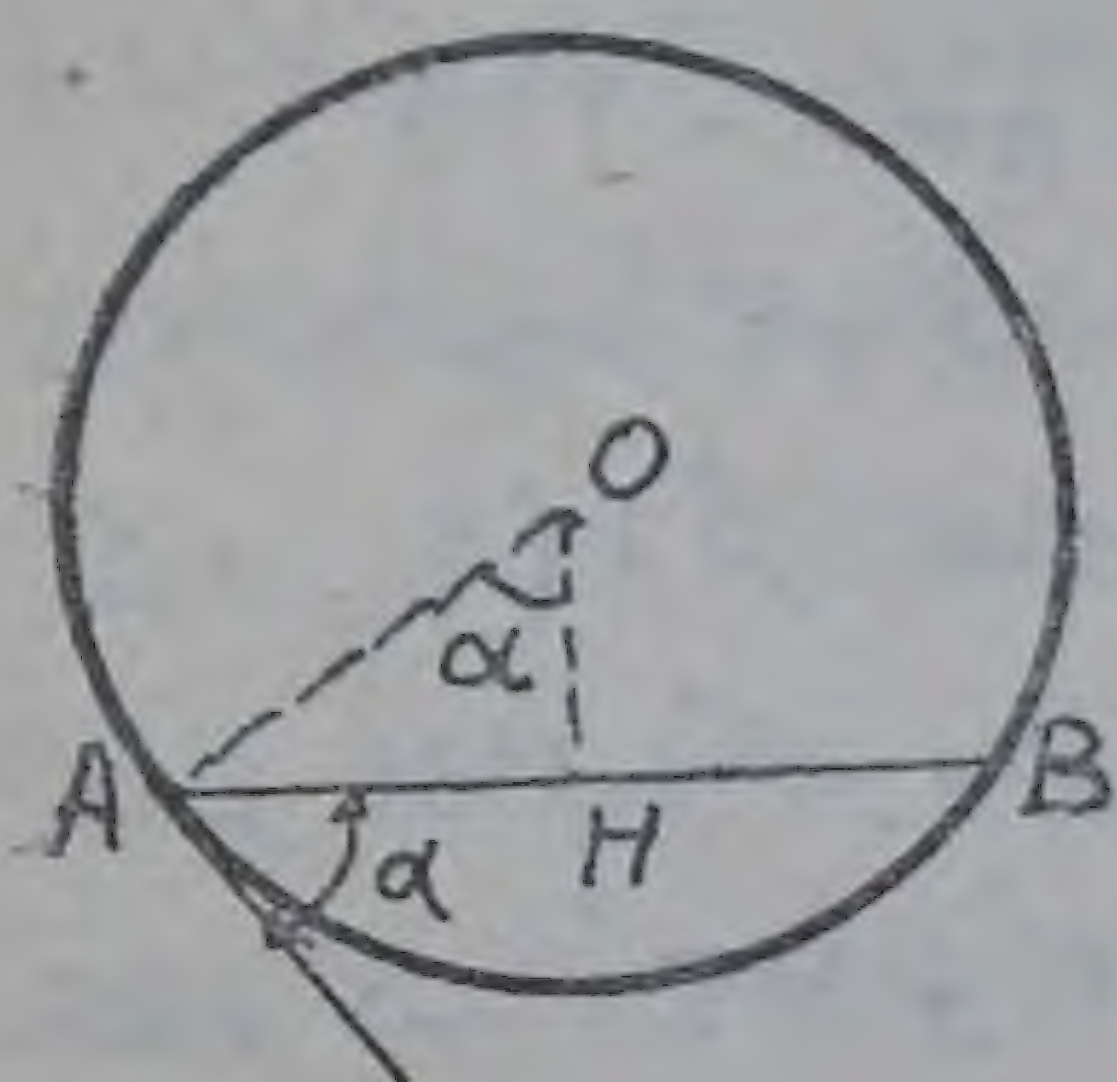
- ۹۸ - قضیه در دو دایره متخارج $d > R + R'$
- « « مماس خارج $d = R + R'$
- « « متقاطع $R - R' < d < R + R'$
- « « مماس داخل $d = R - R'$
- « « متداخل $d < R - R'$

- ۹۹ - قضیه - در دو دایره مماس بر هم خط المرکزین از نقطه مماس میگذرد .
- ۱۰۰ - قضیه - در دو دایره متقاطع خط المرکزین بر وتر مشترك عمود است .

اندازه زاویه

- ۱۰۱ - برای زاویه های مرکز ، محاطی ، ظلّی ، داخلی و مقیاس آنها رجوع شود به شماره ۱۷

- ۱۰۲ - قضیه - در یک دایره یا دوایر مساوی قوسهای مساوی مقابلند بزوایای مرکزی مساوی و بعکس .
- ۱۰۳ - مسئله - بر قطعه AB دایره حاوی زاویه α (شماره ۱۷) را مرور دهید .



(ش ۸)

کافیست AC را چنان رسم کنیم که با AB زاویه α را بسازد (ش ۸) عمودی که از A بر AC اخراج شود عمود منصف AB را در O قطع میکند O مرکز و OA شعاع دایره مطلوبست .

قوس و وتر

- ۱۰۴ - قضیه - هر وتر کوچکتر است از قطر .
- ۱۰۵ - قضیه - دو انتهای قطری که بر یک نقطه میگذرد دورترین و نزدیکترین نقاط دایره نسبت به آن نقطه اند .
- ۱۰۶ - قضیه - در یک دایره وترهای مساوی مقابلند بقوسهای مساوی .
- ۱۰۷ - قضیه - ۱) دو وتر مساوی از مرکز دایره یک فاصله اند (۲) از دو وتر نامساوی آنکه بمرکز نزدیکتر است بزرگتر است .
- عکس قضیه هم صحیح است .

- ۱۰۸ - قضیه - قطر عمود بر وتر و وتر و قوس مقابل آنرا نصف میکند .

۱۰۹ - قضیه - مماس بر دایره بر شعاع نقطه تماس عمود است.

۱۱۰ - قضیه - هر خطی که بر انتهای شعاعی عمود باشد بر دایره مماس است.

۱۱۱ - رسم مماس بر دایره (۱ - اگر نقطه M بر دایره باشد بر انتهای شعاعی که بر آن نقطه بگذرد خطی عمود باید کرد. (۲ - اگر نقطه M بیرون دایره و O مرکز دایره باشد بقطر OM دایره ای میکشیم تا دایره مفروض را در T و T' قطع کند، MT و MT' جوابهای مسئله اند. (۳ - اگر مماس باید موازی امتداد \triangle باشد از مرکز دایره عمودی بر \triangle فرود میآوریم تا دایره را در دو نقطه قطع کند و بر آن دو نقطه دو مماس میکشیم.

۱۱۲ - تعریف - خطی که بر دو دایره مماس باشد مماس مشترك دو دایره است. اگر دو دایره یکطرف مماس باشند مماس مشترك خارجي است و اگر دو طرف مماس باشند مماس مشترك داخلي.

۱۱۳ - جدول نمایندگی وضع دو دایره و تعداد مماسهای مشترك

وضع دودیره	خارج	مماس خارج	مقاطع	مماس داخل	متداخل
تعداد مماسهای مشترك داخلي	۲	۲	۲	۱	۰
« « « مشترك خارجي	۲	۱	۰	۰	۰
جمع	۴	۳	۲	۱	۰

۱۱۴ - قاعده رسم مماس مشترك خارجى : اگر

O و O' مراکز و R و R' شعاعهای دو دایره $(R > R')$ باشند و بقطر OO' يك دایره و بمرکز O و شعاع $R - R'$ دایره دیگری بنزیم تا یکدیگر را در M و M' قطع نمایند، از O به M و M' وصل میکنیم و از محل تقاطع OM و OM' با دایره O خطوطی موازی OM و OM' میکشیم؛ این خطوط مماسهای مطلوبند.

۱۱۵ - برای رسم مماسهای مشترك داخل عیناً مانند

حالت قبل عمل میکنیم جز اینکه دایره ای که بمرکز O رسم میکنیم بشعاع $(R + R')$ خواهد بود.

قوت نقطه

۱۱۶ - قضیه - چون دو وتر یکدیگر را در داخل دایره

قطع کنند حاصلضرب دو قطعه یکی برابر است بحاصلضرب دو قطعه دیگری.

۱۱۷ - قضیه - هر گاه دو قاطع در بیرون دایره یکدیگر

را تلاقی نمایند حاصلضرب هر يك در جزء خارجى آن مساوی است بحاصلضرب قاطع دیگر در قسمت خارجیش.

نتیجه - اگر از يك نقطه قاطع و مماس بر يك دایره

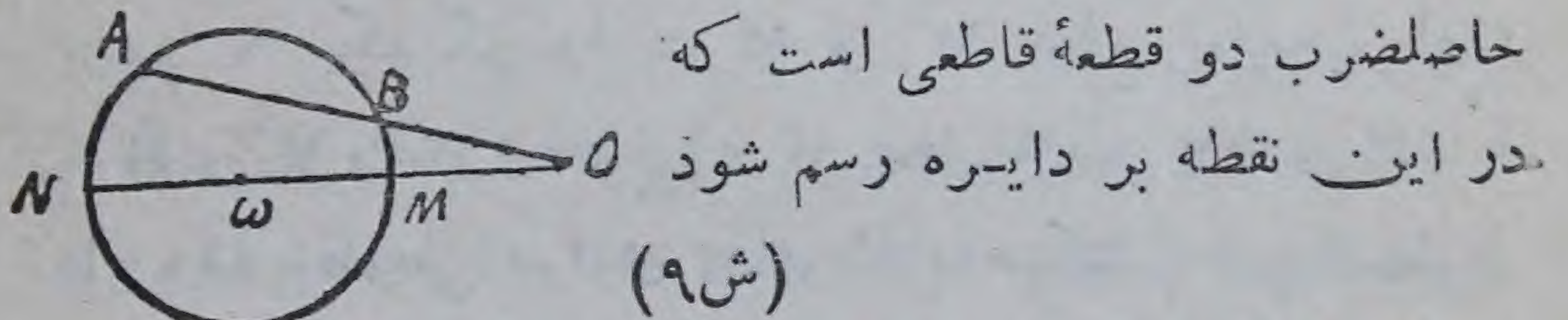
رسم شوند مربع مماس مساویست بحاصلضرب تمام قاطع در جزء خارجى آن.

۱۱۸ - قضیه - اگر بر روی دو خط که در O یکدیگر

را قطع کرده باشند چهار نقطه A و B و A' و B' چنان باشند

که $OA \cdot OB = OA' \cdot OB'$ باشد آن چهار نقطه بر محیط یک دایره قرار دارند.

۱۱۹ - تعریف - قوت یا توان یک نقطه نسبت به دایره



$$p = OA \cdot OB = OM \cdot ON = (d+R)(d-R) = d^2 - R^2$$

بحث - اگر O بیرون دایره باشد $p = d^2 - R^2 > 0$

$$p = d^2 - R^2 = 0 \quad \text{« « « « «}$$

$$p = d^2 - R^2 < 0 \quad \text{« « « « «}$$

۱۲۰ - تعریف - محور اصلی دو دایره مکان

هندسی نقاطی است که نسبت باین دو دایره یک قوه داشته باشند.

۱۲۱ - قضیه - محور اصلی دو دایره خطی است عمود

بر خط المرکزین. اگر فاصله O و O' مراکز دو دایره را d و شعاعشان را R و R' و موقع محور اصلی بر خط المرکزین را H بنامیم:

$$OH = \frac{R^2 - R'^2 + a^2}{2a}$$

نتیجه - محور اصلی دو ایر متحد المرکز بفاصله بینهایت

دور واقع است.

۱۲۲ - تعریف - چند دایره که یک محور اصلی داشته

۱۲۶ - قضیه - محور اصلی دودایره مکان مرا کزد و ایر عمود بر آن دودایره است .

۱۲۷ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه دودایره بر هم عمود باشند آنست که قطریکی بوسیله دیگری بمزدوج توافقی تقسیم شده باشد .

۱۲۸ - قضیه - کلیه دوایری که دودایره مفروض را بزایه قائمه قطع میکنند بر دو نقطه ثابت واقع بر خط المرکزین آن دودایره میگذرند .

محیط و مساحت دایره

۱۲۹ - قضیه - محیط دایره حد مشترك محیط چند بر محیط بر آن و محاط در آنست وقتی عدد اضلاع این چند برهاهاى بینهایت زیاد شود .

۱۳۰ - قضیه - نسبت محیطهای دودایره مساوی نسبت شعاعهای آنهاست .

۱۳۱ - قضیه نسبت محیط دایره بقطر آن عددیست ثابت این عدد $\pi = 3.141592658...$ است .

(نتیجه - ۱) محیط دایره ای بشعاع R مساویست با $2\pi R$

(۲) طول قوس α درجه مساویست با $2\pi \frac{\alpha}{360} R$

۱۳۲ - محاسبه π - بدو طریق ممکنست : (۱) دستور

محیطها که در آن حد محیط چند بر محاطی در دایره ای بشعاع

$R = \frac{1}{2}$ را پیدا میکنند ، زیرا در دایره ای که

$$C = 2\pi R = 2\pi \frac{1}{2} = \pi$$

(۲) دستور محیط های برابر (Isvpérimètres) که در آن عکس شعاع دایره ای را که محیطش مساوی ۲ است بدست می آورند ، زیرا در چنین دایره ای

$$\pi = \frac{1}{R} \text{ پس } R = \frac{C}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

۱۳۳ - قضیه - مساحت دایره مساویست با πR^2

۱۳۴ - تعریف - قطاع دایره قسمتی از دایره است

محصور بین يك قوس و دو شعاع . **قطعه دایره** محصور است بین يك قوس و وتر آن

۱۳۵ - قضیه - ۱) مساحت قطاع مساویست بحاصل ضرب

قوس آن در نصف شعاع . ۲) مساحت **قطعه** مساویست بحاصل ضرب نصف شعاع در فزونی طول قوس آن بر نصف وتر قوس مضاعف آن قوس .

VIII بردارها

۱۳۶ - تعریف - بردار قطعه خطی است که دارای

مقدار و امتداد و جهت معین باشد . دو بردار موازی و

مساوی و در يك جهت را همسنگ ، دو بردار همسنگ واقع

بر يك خط را همچند یا معادل خوانند . دو بردار موازی و مساوی ولی در دو جهت مختلف را جفت یازوج گویند .

۱۳۷ - مقدار جبری بردار - مساویست با طول

(آبسیس) منتها منهای طول مبدأ آن .

۱۳۸ - قضیه شال - ۱) اگر سه نقطه ثابت A و B

و C بر یک امتداد باشند.

$$(AB) + (BC) + (CA) = 0.$$

۲) اگر چند نقطه A و B و C و ... و K و L بر یک

امتداد باشند:

$$(AB) + (BC) + \dots + (KL) + (LA) = 0.$$

۱۳۹ - بر آیند یا مجموع هندسی چند بردار را

باینطریق بدست میآورند: ز انتهای اولی برداری همسنگ

دومی و از انتهای بردار جدید برداری همسنگ سومی و از انتهای

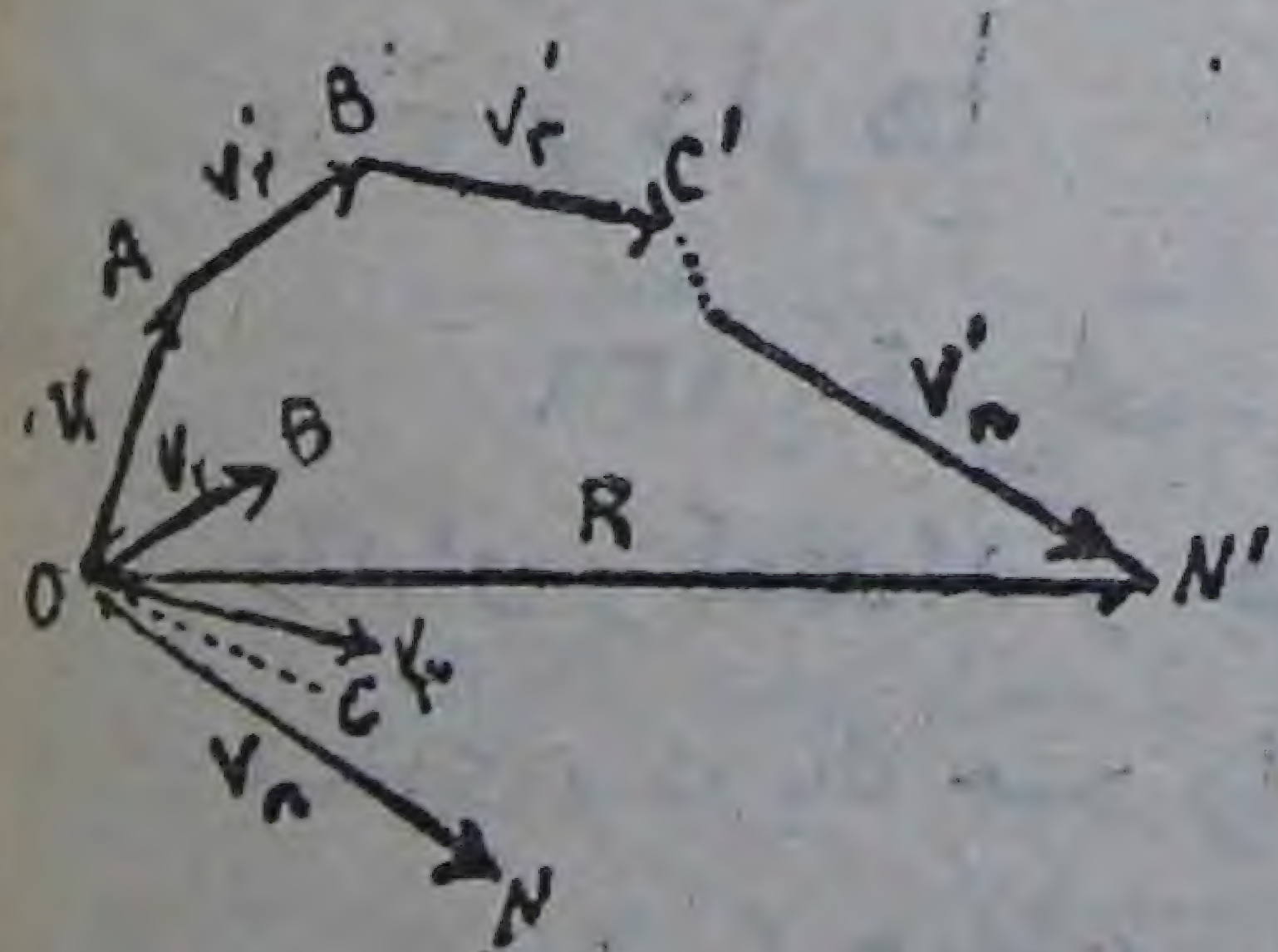
این یکی برداری همسنگ چهارمی میکشند و عمل را ادامه

میدهند تا همسنگهای تمام بردارهای مفروض رسم شوند.

آنگاه مبدأ اولین بردار را بمنتهای آخرین بردار وصل

میکنند. این بردار بر آیند یا منتهجه یا مجموع هندسی بردارهای

مفروض است. (ش ۱۱)



(ش ۱۱)

۱۴۰ - تقاضل هندسی

دو بردار که یک مبدأ داشته باشند

برداريست که منتهای آن دو را بهم

ربط دهد.

۱۴۱ - بر آیند بردارهای غیر

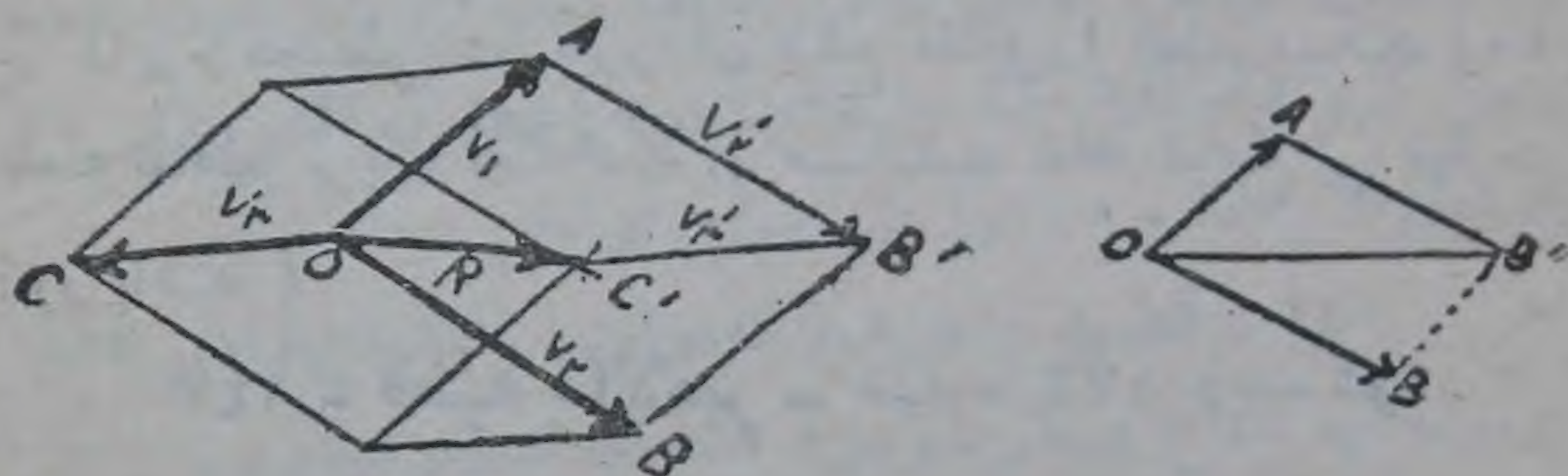
واقع در یک صفحه نیز مانند بردارهای

واقع در یک صفحه بدست میآید.

حالتهای خاص - ۱) بر آیند دو بردار که یک مبدأ

داشته باشند قطر متوازی الاضلاع است که بر روی آن دو ساخته شود. (ش ۱۲)

(۲) بر آیند سه بردار غیر واقع در يك صفحه که يك مبدأ داشته باشند قطر متوازی السطوحی است که آن بردارها سه یال آن باشند (ش ۱۳)



ش ۱۳

ش ۱۲

تصاویر بردارها

۱۴۲ - تعریف - تصویر قائم نقطه A بر يك خط یا يك صفحه موقع عمودی است که از نقطه بر خط یا صفحه فرود آید.

۱۴۳ - قضیه - تصویر بر آیند چند بردار بر آیند تصاویر آن بردارهاست.

IX موربات

۱۴۴ - قضیه منلائوس - رجوع شود بشماره ۶۰

۱۴۵ - قضیه سوا - « « « ۶۱

۱۴۶ - قضیه پاسکال - در هر شش بر محاطی اضلاع

مقابل دو بدویکدیگر را در سه نقطه قطع میکنند که بر يك استقامتند

نتیجه - ۱) در پنج بر محاطی چهار ضلع دو بدو متناظر
یکدیگر را در دو نقطه قطع میکنند که با نقطه تلاقی ضلع سوم
بامماس بر رأس مقابلش بر یک استقامتند. ۲) در چهار بر محاطی
محل تلاقی دو ضلع با دو نقطه تلاقی دو ضلع دیگر با مماسهای
بر رؤس مقابلشان بر یک استقامتند. ۳) در هر سه بر مماس
بر دایره محیطی در هر رأس ضلع مقابل را قطع میکند و سه
نقطه تقاطع بر یک امتدادند. (ممکنست نقاط تقاطع بی نهایت
دور باشند)

۱۴۷ - قضیه دالامبر - شماره ۱۷۲ دیده شود.

X تقسیم توافقی

۱۴۸ - قضیه - در هر روی هر خط فقط دو نقطه M و
 M' میتوان یافت که قدر مطلق نسبت فواصل آنها از دو نقطه
ثابت A و B واقع بر آن خط مساوی عدد ثابت k باشد.
نتیجه - بادر نظر گرفتن علامت جبری در روی هر خط
فقط یک نقطه میتوان یافت که نسبت فواصل آن از A و B
مساوی مقدار ثابت جبری k باشد.

$$\frac{MA}{MB} = - \frac{M'A}{M'B}$$

پس

میگیرند M و M' قطعه AB (و A و B قطعه MM')

را بنسبت توافقی k تقسیم کرده اند.

(۱) اگر O وسط AB باشد: $AO^2 = OM \cdot OM'$

$$(۲) \quad \frac{1}{AM} + \frac{1}{AM'} = \frac{2}{AB}$$

۱۵۰ - تعریف - اگر چهار نقطه A و B و C و D خطی را بنسبت توافقی تقسیم کنند و از يك نقطه O بآن چهار نقطه وصل کنیم $O-ABCD$ را يك دسته اشعه توافقی و هر يك از خطوط OA و ... را يك شعاع توافقی مینامند.

۱۵۱ - قضیه - هر خط که موازی يك شعاع توافقی باشد بوسیله سه شعاع دیگر بدو جزء مساوی تقسیم میشود.

۱۵۲ قضیه - هر خط که يك دسته اشعه توافقی را قطع کند بهمین نسبت توافقی تقسیم میشود.

XI تقارن

۱ - تقارن مرکزی

(۱۵۳ - ۱) قرینه هر نقطه M نسبت بنقطه O نقطه M' است که با O و M بر يك امتداد بوده و $OM' = OM$ باشد. O را مرکز تقارن میگویند. (۲) قرینه هر شکل نسبت بمرکز O شکلی است که هر نقطه اش قرینه يك نقطه از شکل اول باشد.

۱۵۴ - قضیه (۱) - قرینه مرکزی هر قطعه خط موازی و مساوی و در جهت مخالف آنست. (۲) قرینه مرکزی هر زاویه مساوی و در جهت موافق آنست. (۳) قرینه مرکزی هر شکل (چند بر) شکلی (چند بری) مشابه آنست.

۱۵۵ - مرکز تقارن يك شكل - اگر در شكلی نقطه ای بتوان یافت که قرینه هر نقطه شكل نسبت بآن همچنان بر شكل واقع شود آن نقطه را مرکز تقارن شكل میگویند، مانند مرکز دایره و محل تلاقی دو قطر متوازی الاضلاع،

۲ - تقارن محوری

۱۵۶ - (تعریف - ۱) قرینه يك نقطه نسبت بخط Δ نقطه M' است که با M بر روی خطی عمود بر Δ بوده و فاصله آن از Δ مساوی فاصله M از این خط باشد. Δ را محور تقارن گویند. ۲) قرینه محوری هر شكل نسبت به محور Δ شكلی است که هر نقطه اش قرینه يك نقطه از شكل اول باشد. ۱۵۷ - (قضیه - ۱) قرینه محوری هر قطعه خط قطعه خطی است مساوی آن که امتدادش محور را با امتداد آن قطعه خط در يك نقطه قطع میکند. ۲) قرینه محوری هر زاویه زاویه ایست مساوی و در جهت مخالف آن. ۳) قرینه محوری هر شكل شكلی است مساوی آن ولی غیر قابل انطباق بر آن.

۱۵۸ - محور تقارن هر شكل (در صورت وجود)

خطیست که قرینه هر نقطه از شكل نسبت بآن همچنان بر شكل واقع شود. مانند قطر دایره و قطر لوزی.

۱۵۹ - قضیه - اگر شكلی دو محور تقارن عمود

بر هم داشته باشد محل تلاقی آن دو محور، مرکز تقارن شكل است.

XII تشابه

۱۶۰ - تعریف - دو شکل را مشابه یا همانند گویند وقتی که زوایای متناظرشان متساوی و اضلاع متناظرشان متناسب باشند.

۱۶۱ - برای تشابه در مثلث رجوع شود بشماره های ۴۰ تا ۴۳
 ۱۶۲ - قضیه - خطوط موازی بر روی دو خط غیر مشخص قطعات متناسب جدا میکنند.

۱۶۳ - قضیه - در دو شکل مشابه مساحات بر نسبت مربعات دو خط متناظر میباشند.

۱۶۴ - قضیه - همواره دو چندبر مشابه را میتوان بیک عده مثلثهای متشابه و متشابه‌الوضع تجزیه کرد.

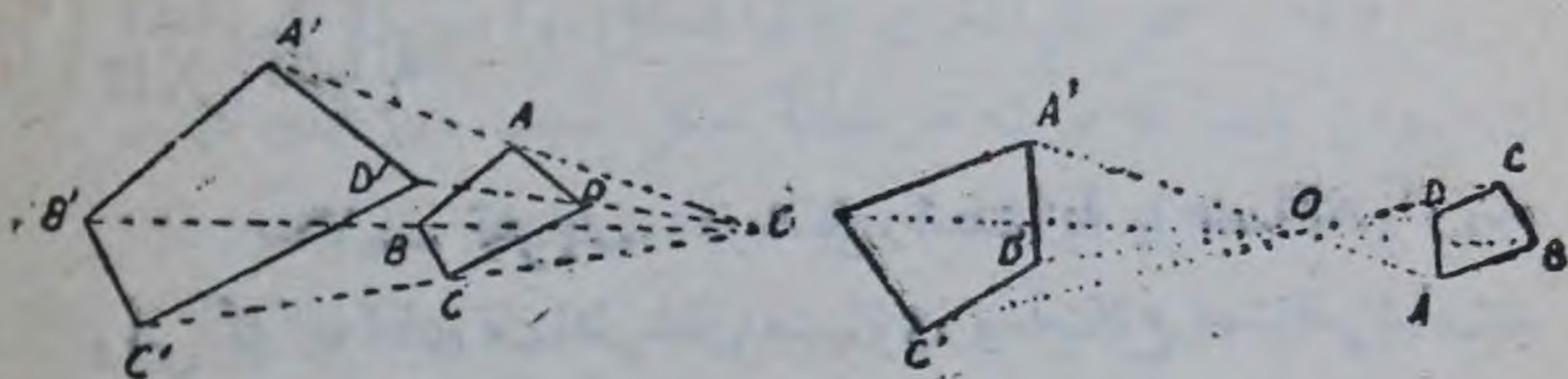
XIII تجانس

۱۶۵ - تعریف - دو شکل F و F' را متجانس هم گویند وقتی که هر دو نقطه متناظر M و M' آنها با نقطه ثابت O ، موسوم به مرکز تجانس، بر یک امتداد بوده و نسبت

$\frac{MO}{M'O}$ مساوی مقدار ثابت k ، موسوم به نسبت تجانس،

باشد. اگر F و F' در یک طرف O باشند $k > 0$ و تجانس مستقیم است (ش ۱۴) و اگر در دو طرف O باشند $k < 0$

است و تجانس معکوس (ش ۱۵)



ش ۱۴

ش ۱۵

۱۶۶ قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه دو شکل
مجانس باشند اینست که هر دو خط متناظر متوازی بوده نسبتشان
مساوی نسبت تجانس باشد.

۱۶۷ - قضیه - مجانس خط مستقیم خطی است مستقیم.

۱۶۸ - قضیه - مجانس دایره دایره است.

۱۶۹ - قضیه - دو دایره در عین حال مجانس مستقیم و
معکوس یکدیگرند.

۱۷۰ - قضیه - مماسهای بر نقاط متناظر در دو منحنی
متجانس با یکدیگر موازیند.

۱۷۱ - قضیه - دو شکل F' و F'' که مجانس شکل سوم
 F باشند مجانس یکدیگرند و سه مرکز تجانس آنها بر روی
یک خط مستقیم واقعند.

۱۷۲ - قضیه دالامبر - سه دایره دو دایره دارای شش
مرکز تجانسند. ۱) سه مرکز تجانس مستقیم بر یک امتدادند.
۲) هر مرکز تجانس مستقیم با دو مرکز تجانس معکوس بر
یک استقامتند.

XIV تغییر مکان در سطح

۱۷۳- تعریف - هرگاه بر طبق قاعده مشخص و معینی بازاء هر نقطه M از شکل F نقطه‌ای مانند M' در صفحه شکل بدست آوریم شکل F' حادث از مجموع نقاط M' را میگویند از تغییر مکان F حاصل شده است و آنرا مبدل یا تبدیل یافته F میگویند .

تغییر مکان ممکنست در اجزاء شکل تغییر دهد ، مانند تجانس ؛ یا در آنها تغییری ندهد ، مانند انتقال و دوران . در این نوع تغییر مکانها تبدیل یافته شکل بوسیله يك لغزش در روی صفحه میتواند بر شکل اصلی منطبق شود .

۱۷۴- قضیه - در تغییر مکانهایی که در آنها شکل تغییر نمیکند وضع جدید دو نقطه برای مشخص کردن وضع جدید شکل کافیست .

انتقال

۱۷۵- هرگاه بردار (AB) مفروض باشد و بازاء هر نقطه M از شکل F نقطه M' را بدست آوریم بطوریکه (MM') همسنگ (AB) باشد گوئیم شکل F' حاصل از مجموع نقاط M' ، از انتقال شکل F باندازه (AB) بدست آمده است . بردار (AB) را که نماینده و مشخص انتقال است بردار انتقال گویند .

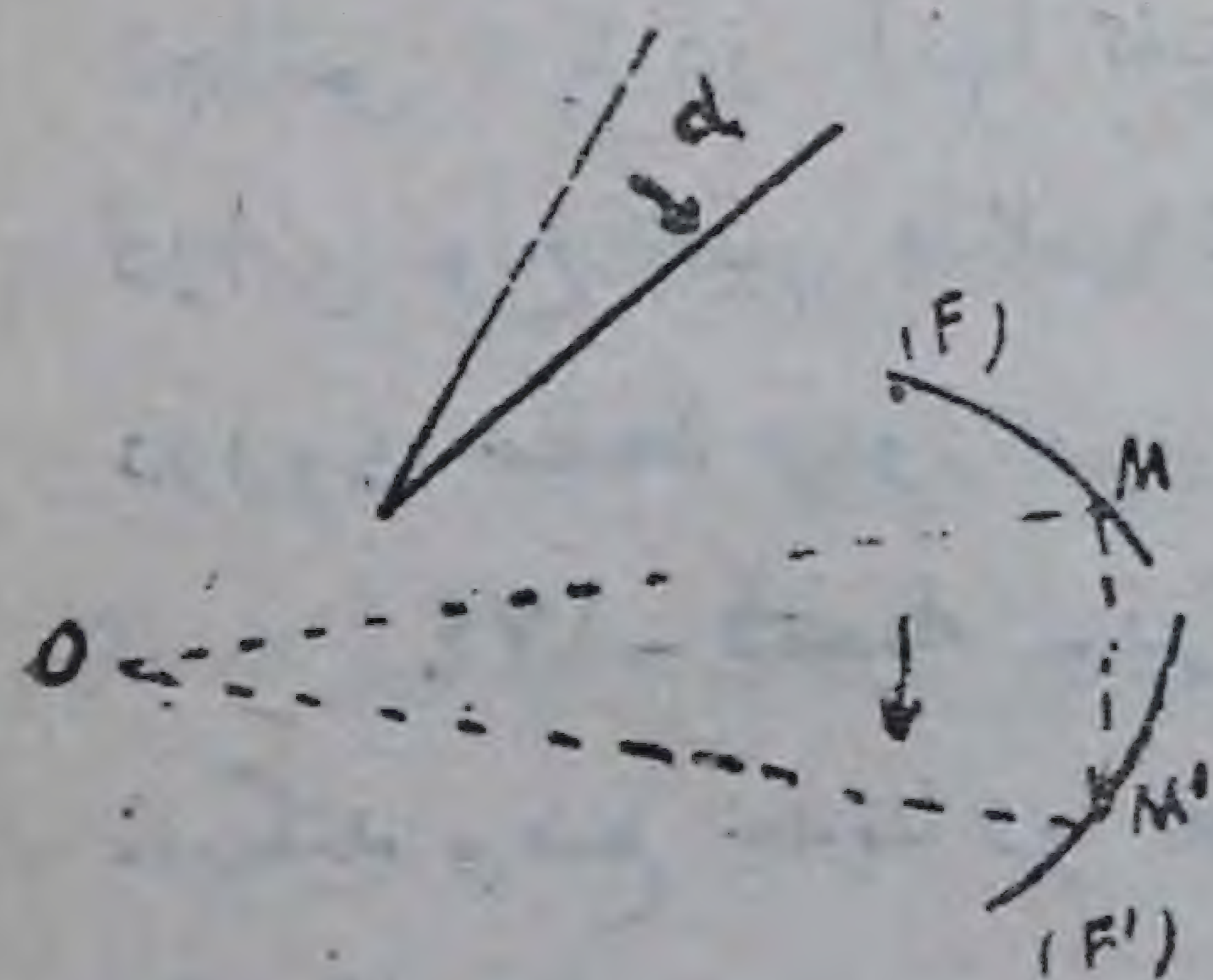
۱۷۶- قضیه - انتقال در اجزاء شکل تغییر نمیدهد .

۱۷۷ - قضیه - در انتقال دو بردار متناظر همسنگ هستند.
 بعکس اگر در تغییر مکانی دو بردار متناظر همسنگ باشند
 تغییر مکان انتقال است •

۱۷۸ - قضیه - تغییر مکان حاصل از چند انتقال ، انتقال
 است . بردار انتقال اخیر بر آیند بردارهای انتقالهای مفروض
 است •

دوران

۱۷۹ - تعریفی - هر گاه زاویه α و نقطه O (ش ۱۵)



ش ۱۵

مفروض باشند و بازاء هر نقطه M
 از شکل F نقطه M' را چنان بدست
 آوریم که $OM' = OM$ و
 $M' \cap M = \alpha$ باشد مجموع نقاط
 M' شکل I' را تشکیل میدهند •
 میگویند I' ز دوران F با اندازه
 α و در جهت سهم بدست آمده است •

۱۸۰ - قضیه - دوران اجزاء شکل را تغییر نمیدهد •

۱۸۱ - قضیه - هر تغییر مکان در صفحه که در اجزاء

شکل تغییر ندهد يك انتقال یا يك دوران خواهد بود • (ش ۱۶،
 ۱ و ۲ و ۳ و ۴) (در صفحه بعد)

XV خط و صفحه

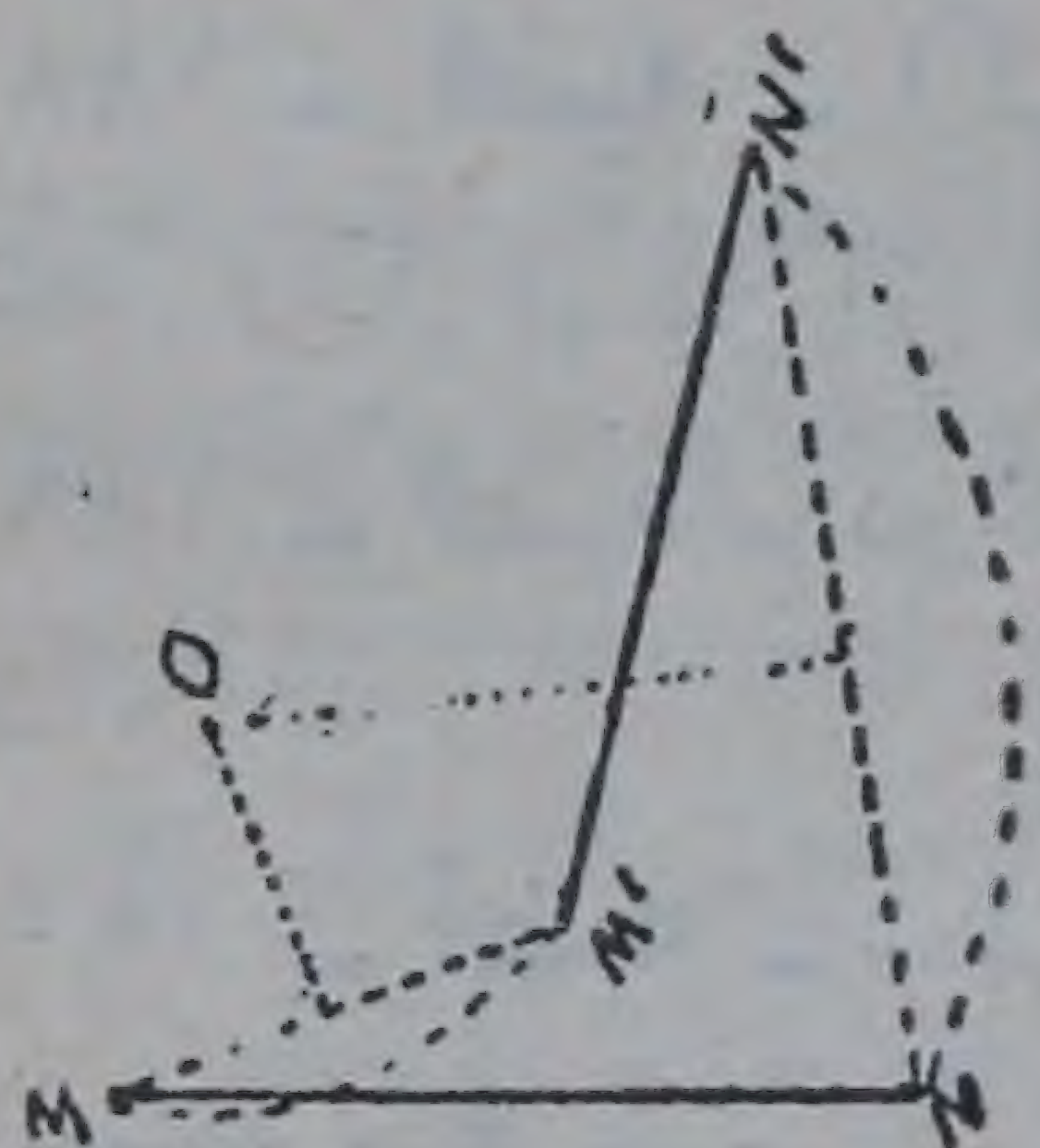
۱۸۲ - صفحه نامحدود است و فضا را بدو ناحیه تقسیم



4



1



3

ش ۱۶

3

• میکند. پس خطی که از يك ناحیه بناحیه دیگر برود ناچار صفحه را قطع میکند.

۱۸۳ - وضع خط نسبت به صفحه - خط ممکنست :

(۱) در صفحه باشد • (۲) با صفحه موازی باشد • (۳) صفحه را قطع کند •

۱۸۴ - قضیه - بر يك خط و يك نقطه فقط يك صفحه ميگذرد.

۱۸۵ - نتیجه - صفحه ممکنست بوسیلهٔ ۱) ۳ نقطه ،
۲) یک خط و یک نقطه ، ۳) دو خط متقاطع یا متوازی ،

• مشخص شود

۱۸۶ - وضع دو خط - دو خط ممکنست : ۱) در يك صفحه باشند ، در این صورت یا متقاطعتند یا متوازی • ۲) در يك صفحه نباشند (متنافر)

۱۸۷ - قضیه - زيك نقطه میتواند يك خط بموازات يك خط رسم کرد •

۱۸۸ - قضیه - اگر يكي از دو خط موازی صفحه ايرا قطع کند ، دیگری نیز آن صفحه را قطع میکند •

۱۸۹ - قضیه - دو خط موازی با خط سوم با يكديگر موازیند •

۱۹۰ - قضیه - خطی که موازی يك خط از صفحه ای باشد با صفحه موازیست.

نتیجه - از يك نقطه خطوط بیشمار بموازات يك صفحه رسم میشوند •

۱۹۱ - قضیه - اگر بر خط Δ که موازی صفحه P است صفحه ای بگذرانیم فصل مشترك دو صفحه موازی Δ است .

۱۹۲ - قضیه - خطی که موازی دو صفحه باشد با فصل مشتركشان موازیست .

۱۹۳ - قضیه - فصل مشترك دو صفحه که بر دو خط موازی بگذرند با آن دو خط موازیست .

۱۹۴ - قضیه - فصل مشترك دو صفحه خطیست مستقیم .

۱۹۵ - قضیه - هر گاه سه صفحه یکدیگر را دو به دو

قطع کنند سه فصل مشترك يا متقاربنند يا متوازی .

۱۹۶ - قضیه - فصل مشترك هر صفحه با دو صفحه متوازی

دو خط متوازی بند .

۱۹۷ - قضیه - از يك نقطه ميتوان فقط يك صفحه

بموازات صفحه مفروض رسم كرد .

۱۹۸ - قضیه - دو صفحه موازی با يك صفحه با یکدیگر

موازی بند .

۱۹۹ - قضیه - از يك نقطه ميتوان خطوط بيشمار موازی يك

صفحه رسم كرد . مكان هندسی آنها صفحه ایست موازی صفحه اول .

نتیجه - ۱) خطی که با یکی از دو صفحه متوازی موازی

باشد با دیگری هم موازیست . ۲) خطی که یکی از دو صفحه

متوازی را قطع کند ، دیگری را هم قطع میکند .

۲۰۰ - قضیه - دو قطعه موازی هم محصور بین دو صفحه

متوازی با یکدیگر برابرند .

۲۰۱ - قضیه - صفحات متوازی بر روی خطوط قطعاعات

متناسب جدا میکنند .

۲۰۲ - تعریف - زاویه بین دو خط متناظر زاویه ایست

که بین دو خط متقاطع متوازی با آنها حادث شود .

۲۰۳ - قضیه - دو زاویه که اضلاعشان موازی باشند

متساوینند .

۲۰۴ - تعریف - خطی را بر صفحه ای عمود گویند وقتی

که بر همه خطوط آن عمود باشد .

۲۰۵ - قضیه - خطی که بر دو خط از صفحه‌ای عمود باشد

بر صفحه عمود است .

(نتیجه - ۱) خطی که بر یکی از دو صفحه متوازی عمود

باشد بر دیگری هم عمود است . (۲) اگر یکی از دو خط متوازی

بر صفحه‌ای عمود باشد دیگری هم عمود است .

۲۰۶ - قضیه - از يك نقطه فقط يك صفحه عمود بر يك

خط میتوان کشید .

(نتیجه - ۱) دو صفحه عمود بر يك خط متوازیند . (۲) از

يك نقطه و در فضا خطوط بیشمار عمود بر يك خط میتوان رسم

کرد ، همه در يك صفحه‌اند .

۲۰۷ - قضیه - همه نقاط واقع بر صفحه‌ای که بر وسط

قطعه خطی عمود باشد از دو انتهای قطعه يك فاصله‌اند .

۲۰۸ - قضیه - از يك نقطه فقط میتوان يك خط بر

صفحه عمود کرد .

نتیجه - دو خط عمود بر يك صفحه متوازیند .

۲۰۹ - قضیه سه عمود - اگر \triangle بر صفحه‌ای عمود

باشد و از موقع آن در صفحه خطی عمود بر يك خط D واقع

در صفحه رسم کنیم و موقع این عمود را M بنامیم ، خطوط واصل

از M بنقاط مختلف \triangle همه بر D عمودند . و بعکس ...

۲۱۰ - قضیه - اگر از نقطه O يك عمود و چند مایل بر

صفحه‌ای رسم کنیم : (۱) مواقع مایلهای متساوی از موقع عمود

بيك فاصله اند . و بعكس ۲) از دو مایل نامساوی موقع آنكه بزرگترست از موقع عمود دور ترست . و بعكس
 ۲۱۱ - تعريف ۱) فاصله نقطه از خط طول عموديست كه از آن نقطه بر آن خط فرود آيد ۲) فاصله دو خط متناظر طول عمود مشترك آنهاست .

۲۱۲ - چند مسئله مهم - ۱) رسم عمود مشترك

D و Δ - بر Δ صفحه ای موازی D میگذرانیم، از يك نقطه D خطی بر این صفحه عمود میکنیم، از موقع عمود D' را موازی D میکشیم تا Δ را در نقطه O قطع کند . از O خطی موازی عمود رسم مینمائیم، این خط عمود مشترك است ۲) باید از O خطی موازی صفحه P رسم کرد تا خط Δ را قطع کند - بر O صفحه ای موازی P میکشیم تا Δ را در M تلاقی کند . OM جواب مسئله است . ۳) باید خطی موازی D رسم کرد تا Δ و Δ' را قطع کند - بر Δ' و Δ دو صفحه موازی D میگذرانیم، فصل مشترکشان جواب مسئله است . ۴) باید بر يك نقطه خطی گذرانند كه دو خط را قطع کند - بر آن نقطه و هر يك از دو خط صفحه ای مرور میدهیم فصل مشترکشان جواب مسئله است .

XVI فرجه ها

۲۱۳ - فضای محصور بین دو صفحه متقاطع را فرجه، هر صفحه را يك روی فرجه، فصل مشترك دو صفحه را یال،

زاویه حادث مابین فصل مشترکهای دوروی فرجه را با صفحه‌ای عمود بر یال **مسطحه** فرجه میگویند. صفحه منصف فرجه، فرجه‌های قائم، تند، باز، مجاور، مجانب، متمم، مکمل و جهت فرجه معانی الفاظ مشابه خود را در روایا دارند.

۲۱۴ - قضیه - مسطحه‌های فرجه‌های متساوی متساویند.

۲۱۵ - قضیه - دو فرجه متساوی بر نسبت مسطحه‌های

خود هستند.

نتیجه - (۱) مقیاس فرجه با مسطحه آن یکی است.

۲۱۶ - قضیه - هر صفحه که بر يك خط از صفحه‌ای

عمود باشد بر آن صفحه عمودست.

(۲) برای اندازه گرفتن فرجه‌ها و احدهای زوایا بکار میروند

۲۱۷ - قضیه - فصل مشترك دو صفحه عمود بر صفحه

سوم بر این صفحه عمودست.

نتیجه - صفحه‌ای که بر فصل مشترك دو صفحه عمود باشد

بر آنها عمود است.

۲۱۸ - هر گاه اضلاع زاویه‌ای بر دوروی فرجه‌ای عمود

باشند آن زاویه مکمل فرجه است.

تصویر بر صفحه

۲۱۹ - تصویر نقطه موقع عمود است که از نقطه بر صفحه

فرود آید.

تصویر يك شکل حادث از مجموع تصاویر نقاط

مختلف آنست.

۲۲۰ - قضیه - تصویر خط مستقیم خطیست مستقیم.

۲۲۱ - قضیه - تصاویر خطوط متوازی متوازی‌اند.

۲۲۲ - قضیه - ۱) اگر يك ضلع زاویه قائمه ای با صفحه تصویر موازی باشد تصویر آن هم قائمه است - ۲) اگر تصویر زاویه ای که يك ضلعش با صفحه تصویر موازیست قائمه باشد اقلا يك ضلع آن با صفحه تصویر موازیست .

۲۲۳ - میل خط نسبت به يك صفحه زاویه بین خط و تصویرش بر آن صفحه است . شیب خط ظل (تانژانت) میل آن میباشد .

۲۲۴ - قضیه - میل خط کوچکترین زاویه بین آن خط و خطوط صفحه است .

۲۲۵ - قضیه - مسطحه يك فرجه بزرگترین زاویه ایست که اضلاعش بترتیب در دوروی فرجه واقعند .

تعریف - خطی را که در يك روی فرجه عمود بریال رسم شود خط بزرگترین شیب آن صفحه نسبت به روی دیگر فرجه گویند .

۲۲۶ - قضیه - ۱) طول تصویر خط مساویست به طول خود آن ضرب در جیب تمام میلش . ۲) مساحت تصویر يك شكل مسطح مساویست با حاصل ضرب مساحت آن شكل در جیب تمام زاویه حادث بین صفحه شكل و صفحه تصویر .

XVII تقارن در فضا

۲۲۷ - تقارن نسبت به يك نقطه - M' را قرینه M نسبت به مرکز تقارن O گویند وقتی که O وسط MM' باشد .

۲۲۸ - تقارن نسبت به يك خط - M' را قرینه M

نسبت بمحور تقارن \triangle گویند وقتی که \triangle در صفحه ای عمود بر وسط MM' باشد.

رجوع شود به تقارن در صفحه (شماره های ۱۵۳ تا ۱۵۹)

۲۲۹ - تقارن نسبت بیک صفحه - M' را قرینه M نسبت بصفحه P گویند وقتی که P بر وسط MM' عمود باشد.

۲۳۰ - دو شکل نسبت بیک مرکز، یک محور یا یک صفحه قرینه یکدیگرند وقتی که جمیع نقاط یکی قرینه نقاط دیگری باشد. اگر در شکلی نقطه ای، خطی یا صفحه ای بتوان یافت که قرینه هر نقطه شکل نسبت بآن نقطه، خط یا صفحه همچنان بر خود شکل واقع گردد آنها را مرکز یا محور یا سطح تقارن شکل گویند.

۲۳۱ - هر گاه اجزاء شکلی را بتوان بر اجزاء شکل دیگری که مساوی آنست منطبق نمود دو شکل مساوی و قابل انطباق هستند والا مساویند اما انطباق ناپذیر.

۲۳۲ - قضیه - ۱) دو قرینه یک شکل نسبت به یک صفحه و یک نقطه از آن صفحه قابل انطباقند - ۲) دو قرینه یک شکل نسبت بدو مرکز قابل انطباقند - ۳) قرینه های یک شکل نسبت بیک صفحه و یک مرکز قابل انطباقند - ۴) همچنین قرینه های یک شکل نسبت بدو صفحه - ۵) قرینه مرکزی یک جسم ممکنست بر آن قابل انطباق باشد یا نباشد - ۶) قرینه های یک جسم نسبت بیک محور یا یک صفحه بر خود جسم قابل انطباق نیستند.

۲۳۳ - قضیه - ۱) قرینه هر شکل مستوی نسبت بیک مرکز، یک محور یا یک صفحه با خود آن شکل مساویست - ۲) قرینه یک صفحه، صفحه است ۳) قرینه هر فرجه نسبت بیک صفحه فرجه‌ایست مساوی با آن اما در جهت مخالف.

۲۳۴ - قضیه - ۱) اگر شکلی دو صفحه تقارن عمود برهم داشته باشد دارای یک محور تقارن (فصل مشترک دو صفحه) است - ۲) اگر شکلی سه صفحه تقارن عمود برهم داشته باشد دارای یک مرکز تقارن (نقطه مشترک سه صفحه) نیز هست.

XVIII - تجانس در فضا

۲۳۵ - تعریف - هر گاه نقطه O بنام مرکز تجانس و عدد λ بنام نسبت تجانس داده شده باشند مجانس هر شکل F نسبت به O شکل F' است بطوریکه هر دو نقطه متناظر M و M' از آنها با O بر یک امتداد باشند و $\frac{OM'}{OM} = \lambda$ باشد. هر گاه M و M' در یک طرف O باشند (λ مثبت باشد) F' مجانس مستقیم F و اگر M و M' در دو طرف O باشند (λ منفی باشد) مجانس معکوس آن میباشد.

۲۳۶ - قضیه - ۱) مجانس یک قطعه خط خطی موازی آنست که اگر مجانس مستقیم باشد با آن در یک جهت است و اگر معکوس باشد در جهت مخالف.

۲) زاویه بین دو خط مساوی زاویه بین مجانسهای آنهاست.

(۳) مجانس خطی که بر مرکز بگذرد بر خود آن خط منطبق است .

(۴) مجانس صفحه مستوی صفحه مستویست .

۲۳۷ - قضیه - (۱) مساحات دو شکل مجانس بر نسبت مربع دویال متناظر آنهاست .

(۲) حجمهای دو شکل مجانس بر نسبت مکعب دویال متناظر آنهاست .

۲۳۸ - قضیه - هر گاه شکل F مرکز تقارن داشته باشد مجانس آن F' نیز مرکز تقارنی خواهد داشت . در اینصورت F و F' در عین حال مجانس مستقیم و مجانس معکوس یکدیگرند و اگر مراکز تقارن آنها را C و C' و مراکز تجانس مستقیم و معکوسشان O و O' و نسبت تجانس را λ بنامیم :

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{O'C'}{O'C} = \lambda$$

۲۳۹ - قضیه - اگر F' و F'' مجانسهای F با نسبتهای

λ و λ' باشند مجانسهای یکدیگر با نسبت $\frac{\lambda'}{\lambda}$ نیز هستند .

۲۴۰ - قضیه - (۱) اگر سه شکل دو بدو متجانس باشند

سه مرکز تجانس بر یک خط بنام محور تجانس واقعند .

(۲) اگر چهار شکل دو بدو متجانس باشند شش مرکز

تجانس در یک صفحه ، بنام صفحه تجانس ، واقعند . چون هر

سه شکل از این چهار شکل یک محور تجانس دارند چهار شکل

چهار محور تجانس خواهند داشت که اضلاع یک چهار بر کاملند

و رؤس چهار بر کامل شش مرکز تجانس چهار شکل میباشند .

تبصره - اگر چهار شکل که مرکز تقارن دارند دو بدو مجانس یکدیگر باشند هر دسته سه تائی آنها چهار محور تجانس (يك محور تجانس مستقیم و سه محور تجانس معکوس) دارند؛ پس دستگاه چهار شکل شانزده محور تجانس دارند که چهار بچهار در هشت صفحه مشخص واقع میباشند.

XIX - تشابه در فضا

۲۴۱ - جسمی را مشابه جسم دیگر گویند که بامجانس مستقیم آن مساوی باشد. نسبت دو یال متناظر را نسبت تشابه مینامند.

۲۴۲ - قضیه - در دو جسم متشابه (۱) فرجه های متناظر با هم برابرند؛ (۲) یالهای متناظر بر يك نسبتند؛ (۳) وجوه متناظر چندبر های متشابهند.

۲۴۳ - قضیه - دو چند روی متشابه را میتوان همواره بچند چهار وجهی متشابه و متشابه الوضع تجزیه نمود.

۲۴۴ - قضیه - نسبت مساحات دو جسم مشابه مساوی نسبت مربع اضلاع متناظر و نسبت حجمهایشان مساوی نسبت مکعب اضلاع متناظرشان میباشد.

XX - تغییر مکان در فضا

۱ - انتقال

۲۴۵ - قضیه - اگر در تغییر مکان در فضا سه نقطه غیر واقع بر يك امتداد جسمی بر روی سه خط موازی و مساوی و یکجهت تغییر مکان دهند جسم حرکت انتقالی کرده است و بردار انتقال مساوی و در جهت تغییر مکان یکی از آن سه نقطه است.

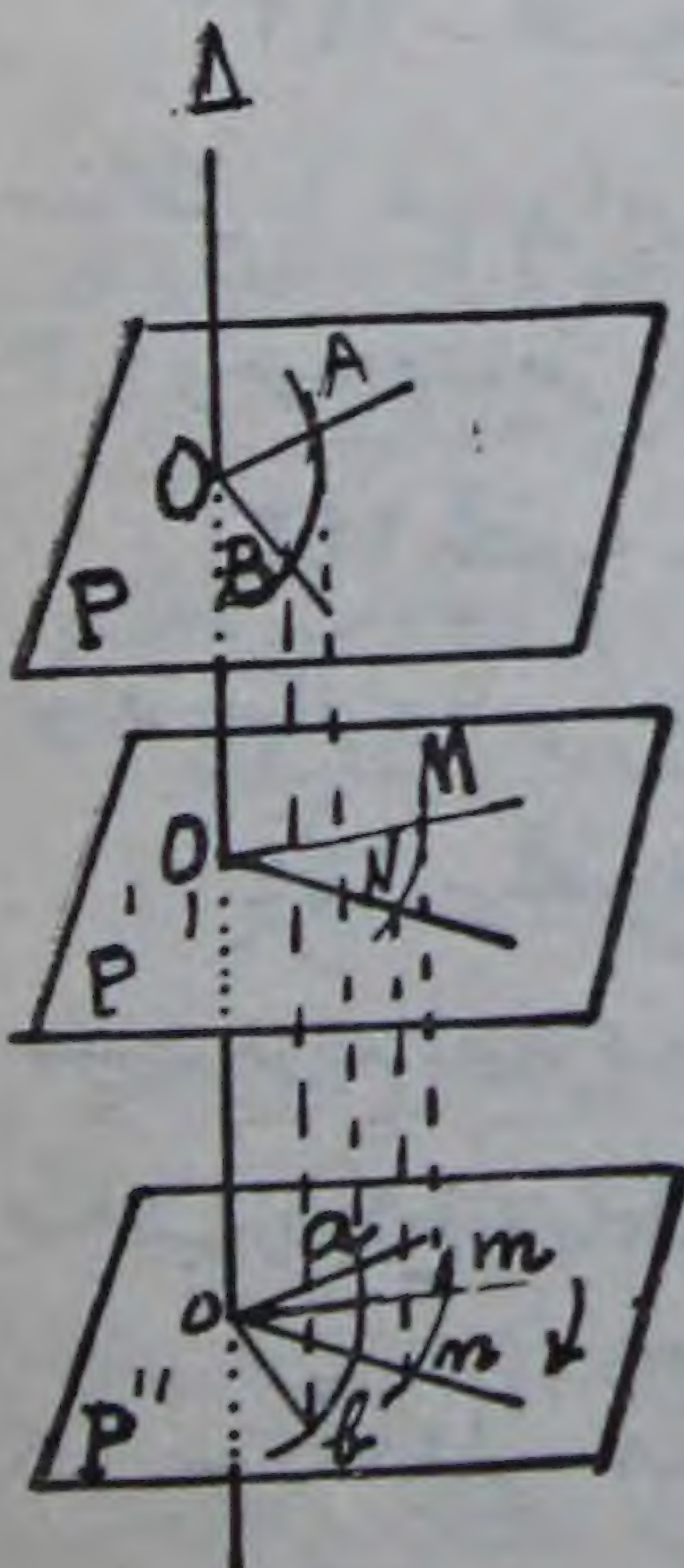
نتیجه - انتقال در اجزاء شکل تغییر نمیدهد.

۲۴۶ - چند انتقال را در فضا میتوان يك انتقال تبدیل کرد. بردار این انتقال مساوی برآیند بردارهای انتقالهای جزء میباشد.

۲ - دوران

۲۴۷ - تعریف - اگر سه

صفحه موازی P و P' و P'' (ش ۱۷) فرض نمائیم (۱) دوزاویه AOB و MO, N که در دو صفحه p و P' واقعند و رؤسشان بر روی خط OO_1 عمود بر صفحات قرار دارند، در يك جهت هستند اگر تصاویر شان بر روی صفحه P'' در يك جهت باشند (۲) و نیز دو قوس واقع در صفحات p و P' که مراکز شان در روی خطی عمود بر صفحات باشد در



ش ۱۷

يك جهتند وقتی تصاویرشان بر روی P'' در يك جهت باشند .
 ۲۴۸ - قضیه - هر گاه شکلی حول محوری دوران
 کند تصاویر تمام نقاط آن بر روی صفحه عمود بر محور در يك
 جهت و بزوایای متساوی دوران مینمایند .

۲۴۹ - قضیه - هر گاه شکلی در فضا تغییر مکان دهد
 بطوریکه سه نقطه غیر واقع بر يك امتداد آن بر روی سه صفحه
 متوازی سه قوس متساوی و در يك جهت بپیمایند و مراکز سه
 قوس در روی خطی عمود بر این صفحات واقع باشند شکل در
 فضا دوران کرده است و خطی که بر مراکز قوسها میگذرد محور
 دوران است .

۳ - حرکت مارپیچی

۲۵۰ - قضیه - هر تغییر مکان هر شکلی که بر روی کره
 رسم شده باشد ممکنست تبدیل بدوران در حول یکی از قطر
 های کره شود .

۲۵۱ - قضیه - هر تغییر مکان در فضا که در اجزاء شکل
 تغییر ندهد منجر بیک انتقال و یک دوران میشود .

۲۵۲ - تعریف - هر تغییر مکان را که منجر بیک دوران
 و یک انتقال بموازات محور دوران شود حرکت مارپیچی مینامند .

XXI چندروها ، منشور ، هرم

۲۵۳ - تعریف - چند رو یا کثیر الوجوه جسمی است
 که از هر طرف بسطوح مستوی محدود شده باشد . قسمتی از

هر صفحه محدود بحدود جسم را يك رو يافرجه ، فصل مشترك دو زو را يال ، فصل مشترك دويال را راس ، فرجه بين هر دورو را يك فرجه جسم ميگویند . چند روی گوژ آنست که مقطع هر صفحه در آن چند برگوژ باشد . چندروی منتظم آنست که همه روهایش باهم و همه فرجههایش باهم مساوی باشند . چندروهای منتظم را اجسام افلاطونی ميگویند .

۲۵۴ - قضیه اوار - اگر s عده روس ، a عده يالها

و f عده روهای يك چند روی گوژ باشند $f + s = a + 2$

۲۵۵ - قضیه - اجسام افلاطونی منحصر به پنج هستند :

چهارروی منتظم (۴ راس و ۶ يال) ، هشت رو (۶ راس و ۱۲ يال) ، بيست رو (۱۲ راس و ۳۰ يال) [در اين سه جسم هر رو سه بر است] ؛ مكعب که هرروی آن مربعست و ۸ راس و ۱۲ يال دارد ؛ دوازده رو که هرروی آن پنج برست و ۲۰ راس و ۳۰ يال دارد .

۲۵۶ - تعريف - سطح منشوري آنست که از تغيير

مکان خطی بنام مولد که همواره بموازات خود تغيير مکان دهد و بر يك چندبر متکی باشد پديد آيد . منشور قسمتی از فضا محصور بين يك سطح منشور و دو صفحه مستوی است ، اگر صفحه ها موازی نباشند منشور ناقص ، اگر صفحه ها بر مولد عمود باشند منشور قائم است . مقطع هر صفحه عمود بر مولد منشور را مقطع قائم گویند .

سطح هرم سطحی است که از تغيير مکان خطی بنام

مولد که همواره بر نقطه ثابتی بگذرد و بر محیط چند بری

متکی باشد پدید آید. قسمتی از فضا محصور بین چنین سطحی بایک صفحه مستوی را هرم میگویند. در هرم منتظم همه روها سه برهای متساوی الساقین متساویند.

هرم ناقص از قطع کردن یک هرم بایک صفحه پدید میآید. در هرم منتظم ارتفاع هر سه بر جانبی و در هرم ناقص منتظم ارتفاع هر دوزنقه جانبی را سه هم میگویند.

۲۵۷ - قضیه - فصل مشترك صفحات متوازی با سطح منشوری چند برهای متساویند.

۲۵۸ - قضیه - سطح بدن منشور مساویست بحاصل ضرب محیط مقطع قائم دریال.

۲۵۹ - قضیه - هرگاه سه روی یکی از کنجهای منشوری با سه روی یکی از کنجهای منشور دیگر متساوی و متشابه‌الوضع باشند دو جسم متساویند.

۲۶۰ - قضیه - ۱) در متوازی السطوح: روهای مقابل موازی و مساوی یکدیگرند. ۲) چهار قطر یکدیگر را در یک نقطه قطع میکنند. ۳) این نقطه مرکز تقارن جسم است.

۲۶۱ - قضیه - هر منشور مایل معادل منشور قائمی است که قاعده اش مقطع قائم و ارتفاعش یال آن باشد.

۲۶۲ - قضیه - ۱) حجم دو مکعب مستطیل که یک یال مشترك داشته باشند بر نسبت حاصل ضرب دو یال دیگر است. ۲) حجم دو مکعب مستطیل که دو یال مشترك داشته باشند بر نسبت یال سوم است.

۲۶۳ - قضیه - ۱) حجم مکعب مستطیل مساویست به حاصلضرب سه یال آن ۲) حجم متوازی السطوح مساویست به حاصلضرب قاعده در ارتفاع ۳) بطور کلی حجم منشور مساویست به حاصلضرب مقطع قائم در یال (قاعده در ارتفاع).

۲۶۴ - قضیه - در هرم منتظم همه روها باهم برابرند.

۲۶۵ - قضیه - هر گاه صفحه‌ای هرم را موازی قاعده

قطع کند : ۱) یالها و ارتفاع هرم همه بیک نسبت قطع میشوند؛

۲) مقطع مشابه قاعده است ۳) نسبت سطح مقطع به سطح قاعده مساوی نسبت مربع دو ضلع متناظر است .

۲۶۶ - قضیه - دو هرم که قاعده‌هایشان معادل و ارتفاعشان

مساوی باشد معادل یکدیگرند .

۲۶۷ - قضیه - هرم سه پهلو $\frac{1}{3}$ منشور سه پهلوئی است

که بهمان قاعده و ارتفاع باشد .

نتیجه - حجم هرم مساویست به حاصلضرب قاعده در

$\frac{1}{3}$ ارتفاع

۲۶۸ - قضیه - حجم هرم ناقصی بقاعده های B و b و

ارتفاع h مساوی $(B+b+\sqrt{Bb}) \frac{h}{3}$ است.

۲۶۹ - قضیه - حجم منشور ناقص سه پهلو مساویست

به حاصلضرب قاعده در $\frac{1}{3}$ مجموع سه یال .

۲۷۰ - قضیه - حجم منشور ناقص قائمی که قاعده آن چندبر

منظم n ضلعی باشد مساویست به حاصلضرب قاعده در طول محور،

یعنی خطی که مرکزهای دو قاعده را بهم مربوط میکند .

۲۷۱ - تعریف - شبه منشور جسمی است که دو قاعده آن دوچندبر متوازی و هر يك از وجوه جانبی آن سه بر یک دوزنقه باشد مقطع صفحه ایرا که بیک فاصله از دو قاعده باشد مقطع متوسط گویند .

۲۷۲ - قضیه - حجم شبه منشور مساوی است بحاصل ضرب $\frac{1}{6}$ ارتفاع آن در دو قاعده بعلاوه چهار برابر مقطع متوسط

$$V = \frac{h}{6} (B + b + 4m)$$

XXII استوانه ، مخروط ، کره

۲۷۳ - تعریف - سطح دوار از دوران يك خط (راست یا خم) تغییر ناپذیر در حول مستقیمی بنام محور پدید میآید . جسم دوار بیک سطح دوار محدودست . مدار دایره ایست از سطح دوار که صفحه اش بر محور عمود و مرکزش بر محور منطبق باشد .

نصف النهار مقطع سطح دوار است با هر صفحه که بر محور بگذرد . مماس بر سطح دوار خطیست که بر يك منحنی مرسوم بر روی سطح دوار مماس باشد . صفحه مماس بر هر نقطه از سطح دوار مکان هندسی مماسهائیست که از آن نقطه بر خطوط مختلف مرسوم در سطح دوار رسم شوند . قائم بر سطح دوار در هر نقطه بر صفحه مماس عمود است .

سطح استوانی از حرکت مولد بموازات خود و متکی

بر يك منحنی هادی بوجود میآید . سطح مخروطی از تغییر مکان خطی که همواره بر نقطه ثابتی گذشته بر منحنی هادی متکی باشد پدید میگردد .

سطح کروی آنست که جمیع نقاطش از نقطه‌ای بنام **مرکز** بقاصله R باشند. **کره** جسمیست محدود بسطح کروی. **دایره بزرگ** مقطع کره است باصفحه‌ای که بر مرکز آن بگذرد. • مقطع صفحات دیگر **دایره کوچک** میباشد. • **فاصله کروی** دو نقطه واقع بر روی کره قوسی است از دایره بزرگی که بر آن دو نقطه بگذرد. **منطقه** قسمتی از سطح کره است محصور بین دو صفحه موازی، فاصله این دو صفحه ارتفاع منطقه است. • **عراقیه** یا **عرقچین** منطقه ایست که یک صفحه آن بر کره مماس باشد. **قطعه کروی** قسمتی از کره محصور بین دو صفحه موازیست. **قاج** قسمتی از سطح کره محصور بین دو نیمدایره بزرگ است؛ زاویه قاج عبارتست از زاویه بین دو مماس که از نقطه برخورد دو نیمدایره بر آنها رسم شود؛ **قوس قاج** قوسی از دایره بزرگ است که بر فصل مشترک دو نیمدایره قاج عمود و با آنها محدود باشد. • **اکلیل کروی** قسمتی از حجم کره محصور بین دو نیمدایره بزرگ است. • **قطاع کروی** جسمیست که از دوران یک قطاع دایره حول قطری از دایره پدید آید. • **حلقه کروی** جسمیست که از دوران یک قطعه دایره حول قطری از کره تولید شود.

۲۷۴ - قضیه - همه نصف النهارهای یک سطح دوار با

هم مساویند. •

۲۷۵ - قضیه - ۱) مماسهای بر یک نقطه از سطح دوار

همه در یک صفحه اند بنام صفحه مماس ۲) قائم بر هر نقطه از

سطح دوار بامحور موازیست یا آنرا قطع میکنند.

۲۷۶ - استوانه

- ۱ - دو قاعده استوانه با هم مساویند .
- ۲ - صفحه مماس بر استوانه بر یکی از مولدهای آن میگذرد .
- ۳ - استوانه حد منشور محیطی یا محاطی خود میباشد .
- ۴ - سطح بدن استوانه قائم مساویست با حاصلضرب محیط قاعده در ارتفاع .
- ۵ - جسم استوانه قائم مساویست با حاصلضرب قاعده در ارتفاع .
- ۶ - سطح بدن (حجم) استوانه مایل مساویست با حاصلضرب محیط (سطح) مقطع قائم آن در مولد .
- ۷ - در استوانه ناقص مستدیر قائم سطح بدن (حجم) مساویست با حاصلضرب محیط قاعده (سطح قاعده) در محور جسم [یعنی خطی که از مرکز قاعده موازی مولد رسم شود] .
- ۸ - مقطع استوانه مستدیر با هر صفحه که موازی قاعده باشد دایره و با هر صفحه دیگر بیضی است ،

۲۷۷ - مخروط

- ۱ - مقطع مخروط مستدیر با هر صفحه که با قاعده موازی باشد دایره ، با هر صفحه که موازی قاعده یا يك مولد نباشد بیضی ، با هر صفحه که موازی يك مولد باشد سهمی و با هر صفحه که مخروط و امتداد آنرا در آنطرف رأس قطع کند هذلولی میباشد (رجوع شود به مخروطات) .
- ۲ - صفحه مماس بر مخروط بر يك مولد آن میگذرد .

۳- مخروط حدهرم محیطی و محاطی خود میباشد .
 ۴- سطح بدن مخروط مساویست بحاصلضرب محیط
 قاعده در نصف سهم .

۵- حجم مخروط مساویست بحاصلضرب سطح قاعده در
 ثلث ارتفاع .

۶- مخروط ناقص حدهرم ناقص محیطی و محاطی خود
 میباشد .

۷- اگر شعاعهای دو قاعده مخروط ناقص را R و r ،
 سهم آنرا l و ارتفاعش را h فرض کنیم :

$$\text{حجم} = \pi \frac{h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$\text{سطح کل} = \pi [R^2 + l(R+r)] \quad \text{سطح بدن} = \pi l(R+r)$$

۲۷۸- کره

۱- مقطع هر صفحه در کره دایره ایست که مرکز
 موقع عمود است که از مرکز کره بر صفحه قاطع فرود آید .
 اگر شعاع کره R ، شعاع دایره مقطع r و فاصله این صفحه از
 مرکز کره d فرض شوند:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

۲- هر خط کره را فقط در دو نقطه قطع میکند .

۳- قطر عمود بر سطح هر دایره کره ، جسم را در دو نقطه
 p و p قطع میکند که دو قطب دایره نام دارند . جمیع نقاط هر
 دایره از هر يك از دو قطب يك فاصله اند .

۴- در يك کره دایره های متساوی از مرکز يك فاصله اند

و بعکس .

۵- در يك کره از دایره‌های نامساوی آنکه بزرگتر است
بمرکز نزدیکتر است و بعکس .

۶- صفحه مماس بر کره با آن فقط يك نقطه مشترك
دارد و بر شعاع نقطه تماس عمود است .

۷- بريك چهار روی منتظم میتوان يك کره محیط و در
آن يك کره محاط کرد . اگر یال آنرا a بنامیم :

$$\frac{a\sqrt{6}}{12} = \text{شعاع کره محاطی} ; \frac{a\sqrt{6}}{4} = \text{شعاع کره محیطی}$$

۸- کوتاه ترین راه بین دو نقطه واقع بر روی کره قوسی
است از دایره بزرگ .

۹- برای تعیین شعاع کره باین راه عمل میکنیم :
دو نقطه M و N از سطح کره را مرکز قرار داده با فاصله‌های
قطبی اختیاری قوسهائی (دو بدو باشعاعهای متساوی) رسم
میکنیم تا از برخورد آنها سه نقطه A و B و C (که واقعند
بر محیط يك دایره بزرگ) بدست آیند . با پرگار روی طولهای
 AB و AC و BC را بر روی صفحه کاغذ نقل میکنیم و با این
سه طول مثلثی میسازیم . دایره محیطی این مثلث مساوی دایره
بزرگ از کره مفروض و شعاعش مساوی شعاع کره است .

۱۰- مساحت سطح حادث از دوران قطعه خط راستی در حول
محوری که با آن در يك صفحه باشد مساویست بحاصلضرب
تصویر قطعه خط بر محور در محیط دایره‌ای که شعاع آن عمودی
باشد که بر وسط قطعه خط اخراج و بمحور محدود گردد .

۱۱- حجم حادث از دوران مثلثی حول محوری که در

صفحه آنست و بر يك رأس آن میگذرد و ضلع مقابل بآن رأس را قطع نمیکند مساویست بحاصل ضرب سطح حادث از دوران ضلع مقابل در $\frac{1}{3}$ ارتفاع وارد بر این ضلع.

۱۲- سطح کره مساویست به $4\pi R^2$

۱۳- حجم « « « $\frac{\pi}{6} d^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$

۱۴- اگر دو صفحه موازی بفاصله h کره ای بشعاع R را قطع و در آن دو دایره بشعاعهای r و r' ایجاد کند:

$$\text{سطح منطقه حادث} = 2\pi Rh$$

$$\text{حجم قطعه کروی حادث} = \frac{\pi}{6} h^3 + \frac{\pi}{4} (r^2 + r'^2) h$$

$$\text{حجم قطاع کروی} = 2\pi Rh \times \frac{R}{3} = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$

۱۵- اندازه زاویه قاع قوس مقابل قاع است.

۱۶- اگر قوس قاع را α فرض کنیم در کره ای

بشعاع R :

$$\text{سطح قاع} = 4\pi R^2 \frac{\alpha}{360} = \pi R^2 \frac{\alpha}{90}$$

$$\text{حجم اکلیل} = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\alpha}{360} = \pi R^3 \frac{\alpha}{270}$$

۱۷- حجم حلقه کروی حادث از دوران قطعه دایره ای

حول يك قطر دایره مساویست بانصف حجم مخروطی كه شعاع قاعده اش وتر قطعه دایره و ارتفاعش تصویر این وتر بر محور دوران باشد. پس اگر قطعه را AB و طول تصویر

آنرا $A'B'$ فرض کنیم :

$$\text{حجم حلقه} = \frac{\pi}{4} AB^2 \cdot A'B'$$

XX سه بر کروی

۲۷۹ - تعریف - چند بر کروی قسمتی است از سطح

کره محدود بچند قوس ازدوایر بزرگ .

(ش ۱۸) هر يك از قوسهای

دایره بزرگ مانند AB را يك پهلوی ،

نقطه تلاقی دو پهلوی را يك راس و گوشه

بین هر دو پهلوی را يك گوشه چند بر

کروی گویند . پس پهلوهایی چند بر

کروی را هم با اتحاد قوس و زاویه اندازه میگیرند .

کنج نظیر يك چند بر کروی آنست که راسش مرکز

کره و یالهای آن منتهی بروس چند بر باشند .

سه بر کروی ساده ترین چند بر هاست .

سه بر قرینه سه بر مفروض آنست که راسش انتهای

اقطار میباشد که بروس سه بر مفروض بگذرند . سه بر کروی

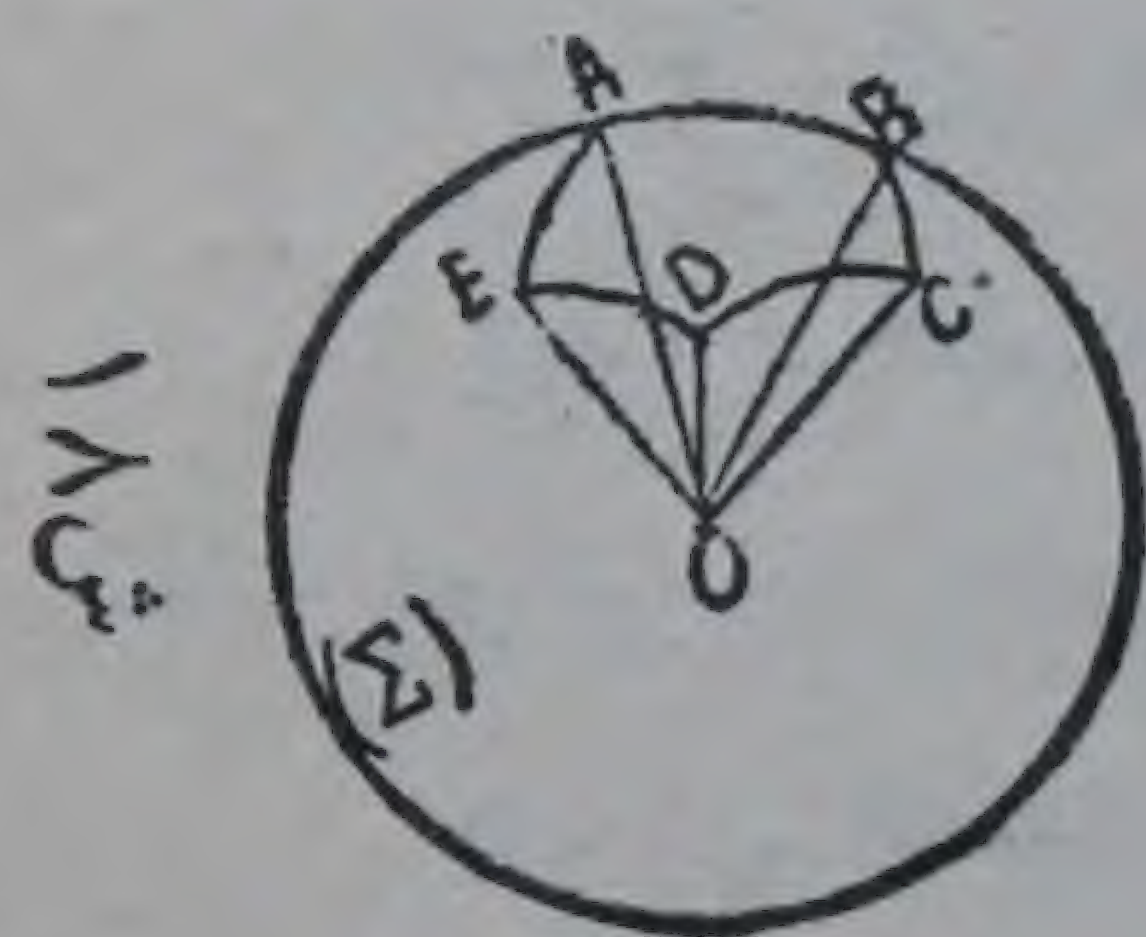
ممکنست سه گوشه راست یا باز داشته باشد . سه بر قطبی سه بر

آنست که هر راس سه بر مفروض قطب يك ضلع آن باشد .

درجه کروی سه بری است که دو پهلوی آن ۹۰ و يك پهلوی

۱ درجه باشد . اگر از مجموع زوایای يك سه بر کروی ۲ قائمه

کم کنیم تفاضل را فضل کروی آن سه بر گویند .



۲۸۰ - قضیه - پهلوهای چندبر کروی مساوی روهای کنج نظیرش و گوشه های آن مساوی فرجه های اینست .

۲۸۱ - قضیه - درسه بر کروی هر پهلو کوچکترست از مجموع و بزرگترست از تفاضل دو پهلو دیگر .

۲۸۲ - قضیه - مجموع پهلوهای سه بر کروی کوچکترست از چهار قائمه

۲۸۳ - قضیه - دوسه بر کروی قرینه معادلند .

۲۸۴ - قضیه - اگر يك سه بر کروی قطبی سه بر دیگر باشد دومی نیز قطبی اولی است .

۲۸۵ - قضیه - هر گوشه يك سه بر کروی متمم پهلوئی مقابل براس نظیرش درسه بر قطبی آنست .

۲۸۶ - قضیه - مجموع گوشه های سه بر کروی واقعست بین ۶ و ۷ قائمه .

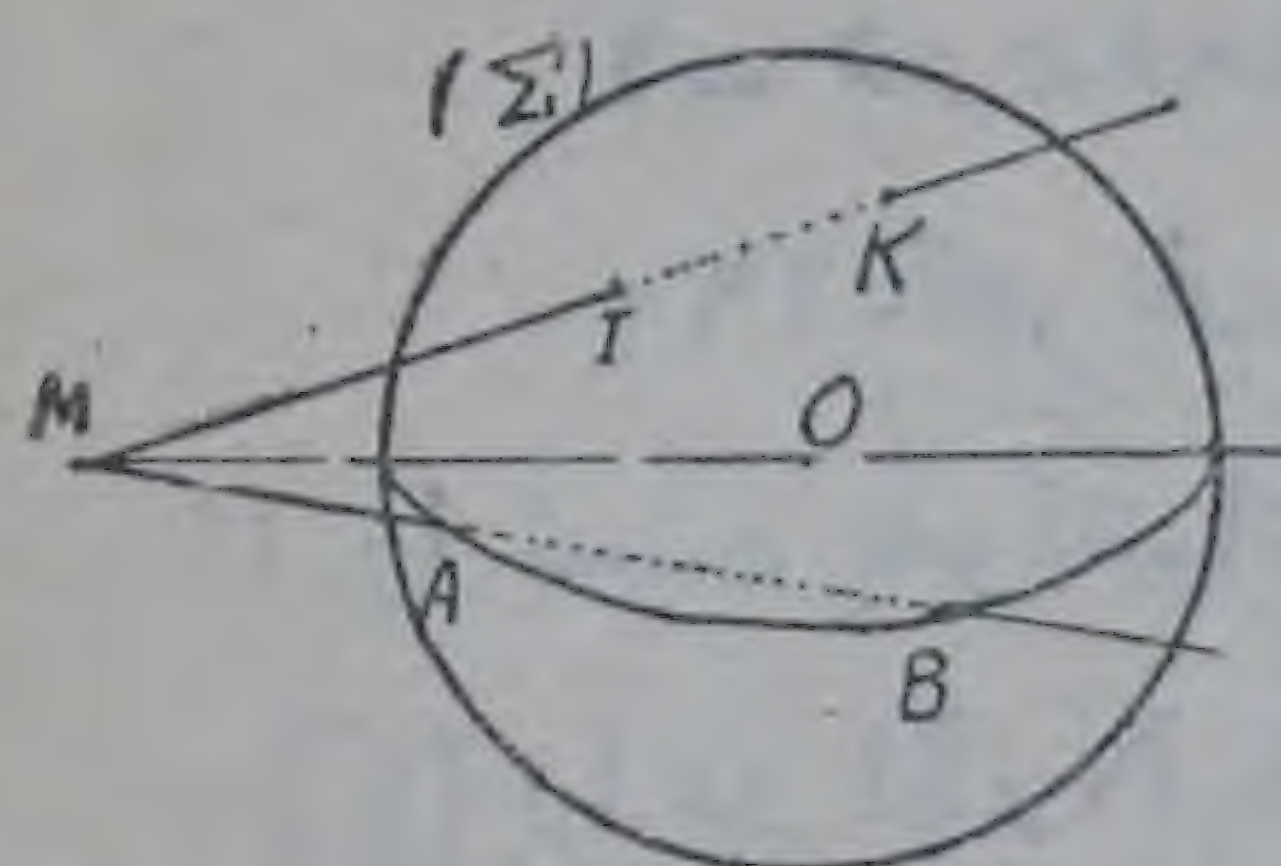
۲۸۷ - قضیه - نسبت مساحت سه بر بسطح کره مساوی نسبت فضل کروی آنست به ۸ قائمه .

(نتیجه ۱ -) مساحت سه بر کروی نصف حاصلضرب فضل کروی آنست در مساحت دایره بزرگ :

$$S = \frac{1}{4} \pi R^2 (زا + زب + زج - ۱۸۰)$$

(۲) اگر سه بر سه قائمه را که $\frac{1}{8}$ کره است واحد سطح و زاویه قائمه را واحد زاویه بنامیم سطح سه بر مساویست با فضل کروی آن .

XXIV قوت نقطه نسبت بکره



۲۸۸- هر گاه از نقطه M ، بفاصله d از مرکز کره Σ (ش ۱۹) ، قاطع غیر مشخصی مرور دهیم تا کره را در A و K قطع کند $MI \cdot MK$ مقدار یست ثابت و مساوی $R^2 - d^2 = p$.

مقدار p را قوت نقطه M نسبت به کره Σ گویند. برای تکمیل رجوع شود بشماره ۱۱۹

۲۸۹ . قضیه - مکان نقاطی که نسبت بدو کره يك قوه داشته باشند صفحه ایست ، بنام صفحه اصلی ، عمود بر خط المرکزین که خط المرکزین را در H قطع کند و

$$OH = \frac{OO'}{2} + \frac{r^2 - r'^2}{2OO'}$$

باشد (در دو کره متقاطع ، مماس یا متحد المرکز صفحه اصلی بترتیب صفحه تقاطع آنها ، صفحه مماس مشترك آنها یا صفحه ای واقع در بی نهایت است) .

نتیجه - ۱) سه صفحه اصلی سه کره یکدیگر را بر يك خط ، بنام محور اصلی سه کره ، تلاقی میکنند . ۲) شش صفحه اصلی چهار کره که مراکزشان در يك صفحه نباشند بر يك نقطه ، موسوم به مرکز اصلی چهار کره ، میگذرند .

XXV قطب و قطبی

۱- در صفحه (قطب و قطبی نسبت بدایره)

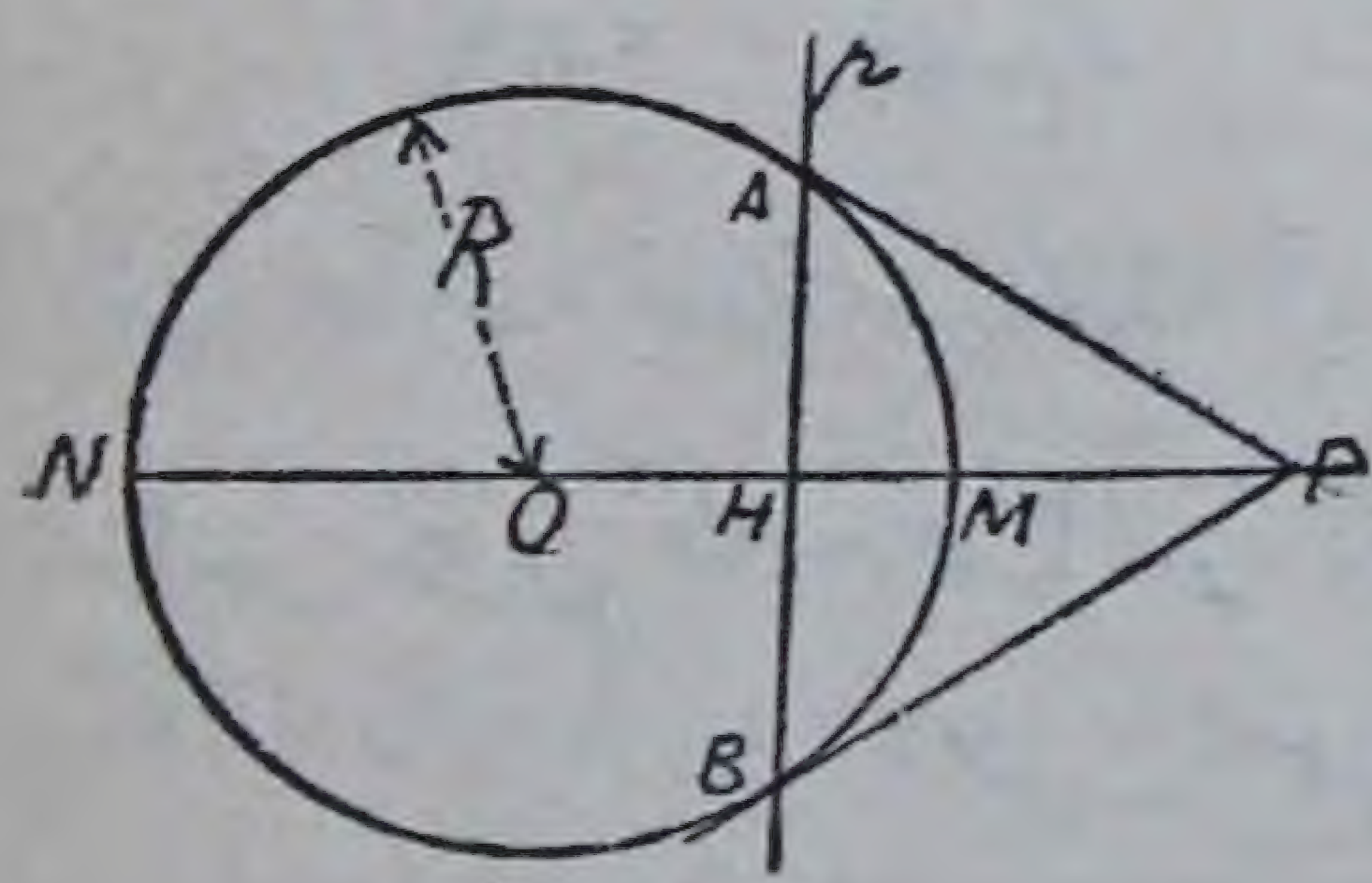
۲۹۰- تعریف- مکان هندسی مزدوجهای توافقی يك نقطه

P را نسبت بدوانتهای قاطع متحرکی که بر P بگذرد و دایره (C) را در M و N قطع کند، قطبی P نسبت به (C) گویند.

۲۹۱- قضیه- قطبی نقطه P نسبت بدایره (C) خطی

است مانند p عمود بر PO که OP را در H تلاقی کند و؛

$$OP \cdot OH = R^2 \text{ باشد}$$



بر حسب آنکه P خارج یا

داخل دایره یا روی دایره باشد

قطبی آن دایره را قطع میکند،

در خارج آن یا در P مماس بر آن

است. P را قطب خط p گویند

۲۹۲- قضیه- قطب هر خط که بر نقطه‌ای بگذرد بر

قطبی این نقطه قرار دارد و بعکس قطبی هر نقطه که بر خطی

واقع باشد بر قطب این خط میگذرد.

۴۹۳- اشکال قطبی معکوس - اگر چند بر $ABCDE$

و دایره (C) در صفحه‌ای مفروض باشند و چند بر $A'B'C'D'E'$

را بدست آوریم بطوریکه هر ضلع این قطبی يك رأس آن

باشد، هر ضلع آن نیز قطبی يك رأس این خواهد بود. چنین

دو شکل را قطبی معکوس یکدیگر گویند.

اگر در شکلی چند نقطه بر يك خط باشند در قطبی

معکوس آن چند خط بر يك نقطه میگذرند • از این خاصیت برای اثبات قضایای مربوط بخطوط متقارب یا نقاط واقع بر يك خط ممکنست استفاده شود •

۲- در فضی قطب و قطبی نسبت بکره

۲۹۴- تعریف - مثل شماره ۲۹۰

۲۹۵- قضیه - قطبی يك نقطه P نسبت بکره صفحه

ایست مانند (π) عمود بر خط OP که آنرا در H قطع کند و
 $OP \cdot OH = R^2$ باشد •

(بقیه مانند شماره ۲۹۱)

۲۹۶- قضیه - قطب هر صفحه که بر نقطه‌ای بگذرد

بر صفحه قطبی این نقطه واقع است و صفحه قطبی هر نقطه که بر صفحه‌ای واقع باشد بر قطب این صفحه میگذرد •

نتیجه - قطب‌های جمیع صفحاتی که بر خط D میگذرند

بر يك خط مانند D' واقعند این خاصیت متقابل است • باینجهت D و D' را دو خط مزدوج نسبت بکره (S) گویند • هر يك از دو خط مزدوج در صفحه ایست که از مرکز کره بردیگری عمود شود • عمود مشترك آنها بر مرکز کره میگذرد و آنها را در k و k' قطع میکند و $Ok \cdot Ok' = R^2$ است •

XXVI انعکاس

۱- در صفحه

۲۹۷- تعریف - اگر نقطه O و شکل F مفروض

باشند و از O به A و B و $C \dots$ نقاط مختلف F وصل کرده در

روی خطوط واصل نقاط A' و B' و C' و \dots را بدست آوریم
بقسمی که :

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \dots = p$$

باشد از مجموع نقاط A' و B' و \dots شکل F' منعکس
شکل F نسبت به مرکز انعکاس O با قوت انعکاس p بدست
میآید . اگر هر دو نقطه متناظر در یکطرف O باشند p مثبت
و گرنه منفی است . هر دو نقطه متناظر را منعکس یکدیگر
میگویند .

هرگاه $p > 0$ باشد و به مرکز O و شعاع \sqrt{p} دایره ای رسم
کنیم ، این دایره را ، که مکان نقاطیست که بر منعکس خود
منطبقند ، دایره انعکاس مینامید .

۴۹۸ - نتیجه (۱) دو نقطه منعکس نسبت به دایره
انعکاس مزدوج یکدیگرند (۲) بین AB و $A'B'$ خطوط
واصل بین دو نقطه A و B و دو منعکس آنها این رابطه
برقرار است :

$$A'B' = AB \times \frac{p}{OA \cdot OB}$$

(۳) دو نقطه A و B با منعکسهایشان A' و B' بر روی
یک دایره قرار دارند .

۴۹۹ - قضیه - مماسهای بر دو منحنی منعکس در دو
نقطه منعکس A و A' با خط AA' زوایای مساوی میسازند
نتیجه - منعکس هر زاویه با آن مساویست .

۴۴۰ - قضیه - اگر F' و F'' منعکسهای F با قوتهای

p' و p'' نسبت به نقطه O باشند، F' و F'' نسبت به مرکز O با نسبت $\frac{p'}{p}$ مجانس یکدیگرند و بر حسب آنکه p' و p'' متحدالعلامه یا مختلفالعلامه باشند تجانس آنها مستقیم یا معکوس میباشد.

۳۰۱ - قضیه ۱ - منعکس دایره ای که بر مرکز انعکاس میگذرد خطیست عمود بر قطری که بر مرکز انعکاس میگذرد. ۲ - منعکس هر خط دایره ایست که بر مرکز انعکاس مرور کند. (اگر خط بر مرکز انعکاس بگذرد منعکس آن بر خودش منطبق است)

۳۰۲ - - قضیه - منعکس هر دایره (که بر O نگذرد) دایره است.

نتیجه ۱ - هر دو دایره، منعکس و مجانس یکدیگرند نسبت بنقاط تلاقی مماسهای مشترک خود؛

۲ - مماسهای بر دو نقطه منعکس از دو دایره یکدیگر را روی محور اصلی قطع میکنند

۴ - در فضا

۳۰۳ - تعریف مانند شماره ۲۹۷.

خواص شماره ۲۹۸ در فضا نیز صحیح است.

۳۰۴ - قضیه ۱ - منعکس هر کره که بر مرکز انعکاس بگذرد صفحه است عمود بر قطری که بر مرکز انعکاس مرور نماید. ۲ - منعکس هر کره دیگر است. ۳ - منعکس هر صفحه کره ایست که بر مرکز انعکاس میگذرد.

۳۰۵ - قضیه - منعکس هر دایره نسبت بیک نقطه که

پرسپکتیو هر نقطه مانند A نقطه A' محل تلاقی شعاع دید OA - با پرده.

پرسپکتیو هر خط مانند AB خط $A'B'$ فصل مشترك صفحه OAB است با پرده.

نقطه گریز - هر گاه از O خطی موازی AB رسم کنیم تا پرده را در f قطع کند f ، که پرسپکتیو نقطه بی نهایت دور خط AB است، نقطه گریز AB نامیده میشود.

خط گریز - هر گاه از O صفحه ای موازی صفحه ABC رسم کنیم تا پرده را بر خط F قطع کند F ، که پرسپکتیو خط بی نهایت دور صفحه ABC است، خط گریز آن صفحه نامیده میشود. صفحه ای را که موازی پرده رسم شود جبهی مینامند.

۳۰۷- قضیه - پرسپکتیوهای خطوط موازی بر يك نقطه میگذرند (نقطه گریز مشترك آنها) .

نتیجه - اگر خطوط موازی با پرده هم موازی باشند پرسپکتیوهای آنها متوازیند.

۳۰۸- قضیه - خطوطی که یکدیگر را در روی صفحه جبهی مار بر نقطه دید تلاقی کنند پرسپکتیوهایشان متوازیند.

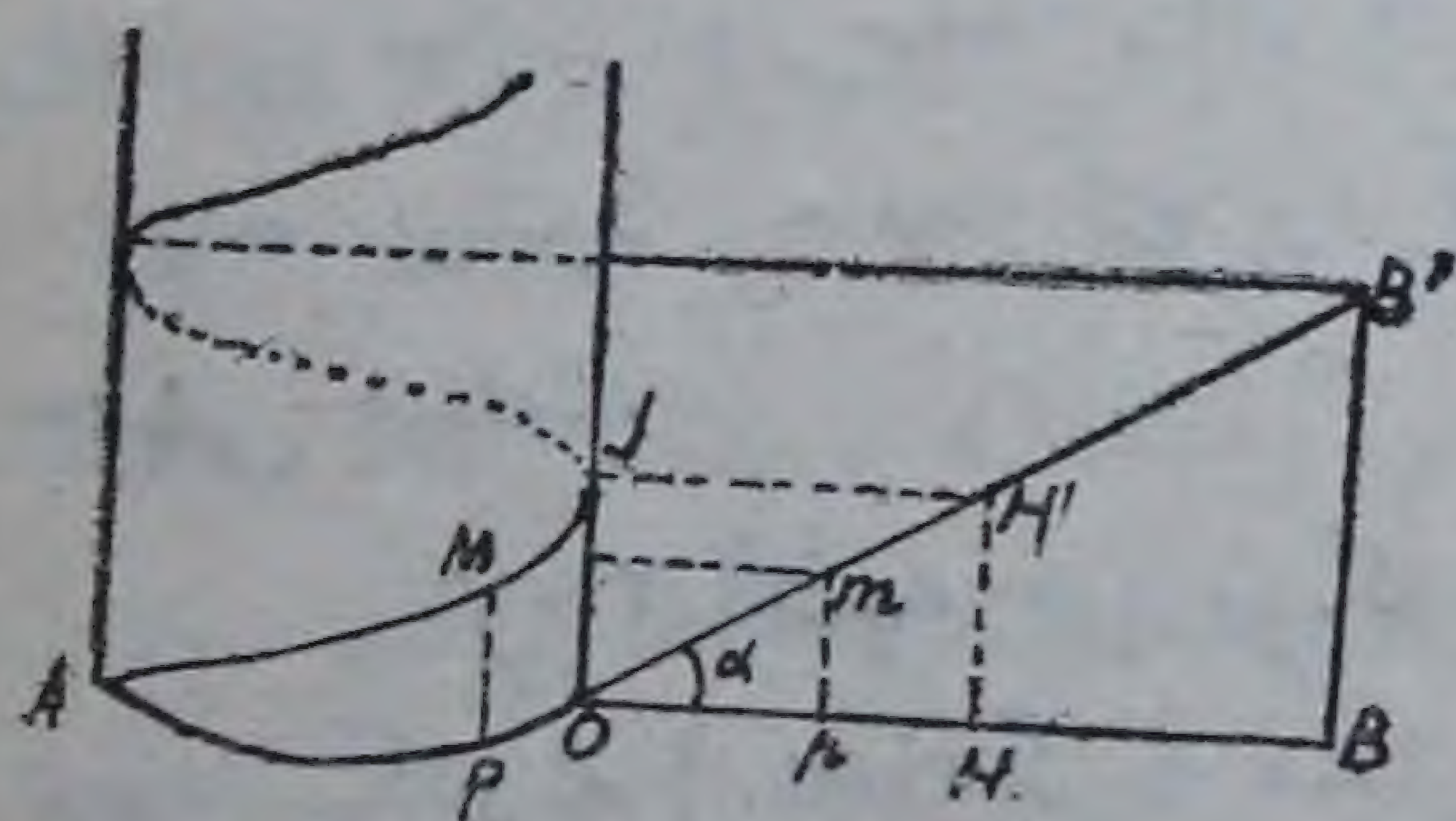
۳۰۹- قضیه - نقاط گریز خطوط افقی در روی خط افق HH' قرار دارند.

حالات خاص - نقاط گریز خطوط افقی که با پرده زاویه 45° تشکیل میدهند نقاط مسافت D و D' هستند.

۳۱۰ قضیه - ۱) پرسپکتیو دایره يك قطع مخروطی
(بیضی، هذلولی یا شلجمی) است ۲۰) پرسپکتیو يك قطع
مخروطی ممکنست دایره باشد.

XXVIII مارپیچ Hélice

۳۱۱ - تعریفی اگر زاویه‌ای مانند α حول استوانه
مستدیر قائمی چنان پیچید که يك ضلع آن بر قاعده منطبق
شود ضلع دیگر بر تنه استوانه خمی ترسیم میکند که مارپیچ
یا حلزونی نام دارد. (ش ۲۲)

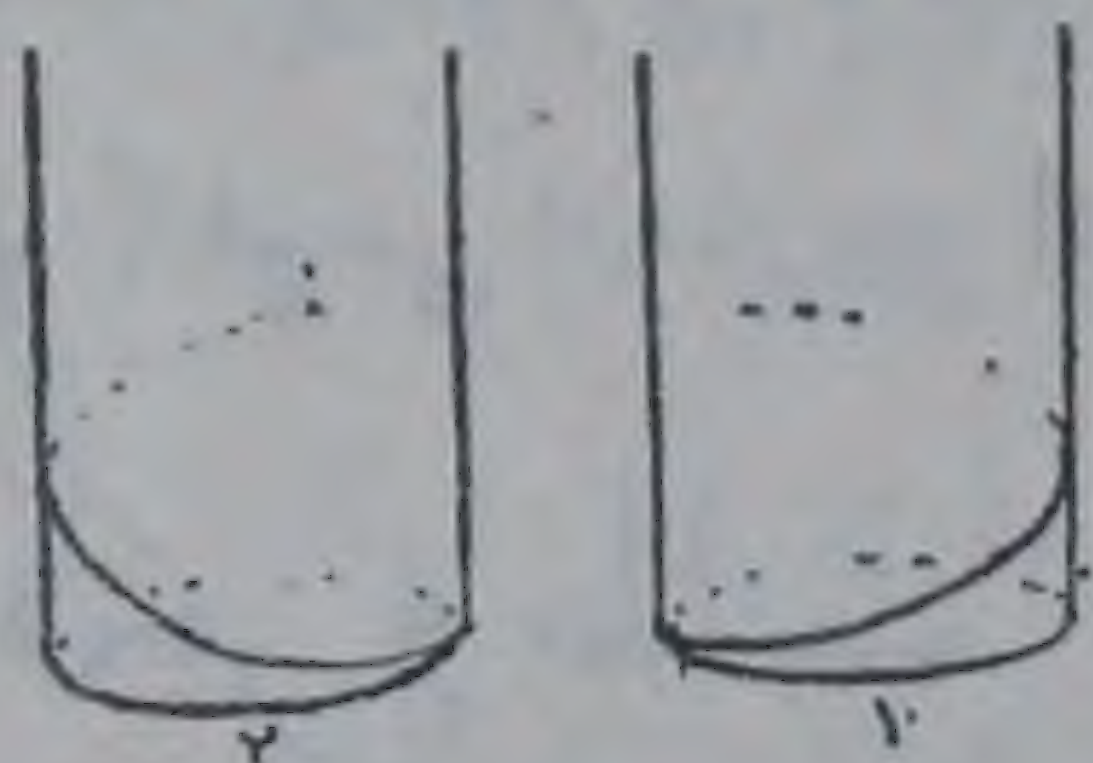


ش ۲۲

چون استوانه و اضلاع
زاویه نامحدودند مارپیچ
هم بی پایان میباشد. محور
و شعاع استوانه را جان
âme و شعاع مارپیچ و
ظل زاویه α را شیب آن

گویند. نقطه A مبدأ مارپیچ است فاصله دو نقطه مارپیچ
واقع بر يك مولد مانند A و D را گام مارپیچ مینامند قسمت
MP از مولد محدود بین يك نقطه M از مارپیچ و قاعده
استوانه را عرض نقطه M و قوس AP واقع بین مبدأ و نقطه
P، تصویر M، را طول منحنی نقطه M میگویند. قسمتی
از مارپیچ که فاصله دوسر آن يك گام باشد یعنی از يك دور
کامل تشکیل شده باشد يك پیچ نام دارد.

پیچ ممکنست بر است dextrorsum (ش ۲۳) یا
 بپیچ sinistrorsum (ش ۲۴) باشد یعنی در قسمت مرئی استوانه
 بطرف راست یا بطرف چپ بالا برود.



(ش ۲۳) (ش ۲۴)

۳۱۲ - قضیه - عرض هر نقطه مارپیچ متناسب است
 با طول منحنی آن نقطه. این نسبت مساوی شیب مارپیچ است.
 تعریف - از قضیه فوق این تعریف برای مارپیچ نتیجه
 میشود: مارپیچ منحنی ایست که بر استوانه قائم مستدیری پیچیده
 شده باشد و عرض هر نقطه آن متناسب با طول منحنی آن
 نقطه باشد.

۳۱۳ - مارپیچهای واقع بر يك استوانه یا استوانه‌های
 متساوی را که در يك جهت بوده و شیبشان با هم برابر باشد
 متساوی گویند.

۳۱۴ - مماس بر مارپیچ - قضیه - بر هر نقطه از
 مارپیچ مماسی میتوان رسم کرد. تصویر آن بر صفحه قاعده
 استوانه مساوی طول منحنی نقطه تماس است.

۳۱۵ - نتیجه - میل مماسهای بر مارپیچ با صفحه
 قاعده مقدار یست ثابت.

۳۱۶ - معادله مارپیچ

$$y = kx = \frac{h}{2\pi r} x \quad (h = \text{گام})$$

۳۱۷ - قضیه - کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه از سطح

استوانه (مستدیر قائم) قوسی از مارپیچ است .

مخروطات

- بیضی

۱ - تعریف بیضی مکان نقاطیست که مجموع فواصلشان

از دو نقطه ثابت F و F' مساوی مقدار ثابت $2a$ باشد -

F و F' را دو کانون، $FF' = 2c$ را فاصله کانونی، O وسط

FF' را مرکز، خط AA' را که بر F و F' می‌گذرد و دو

انتهای آن A و A' از O بفاصله a هستند محور اطول، خط

BB' را که از O بر AA' عمود شود و دو انتهای آن B و

B' از نقطه O بفاصله $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ باشند محور اقصی،

A و A' و B و B' را چهار رأس، نسبت $e = \frac{c}{a}$ را خروج

از مرکز، دایره‌ای را که بر مرکز O و شعاع $OA = a$ رسم شود

دایره اصلی، دو دایره را که بر مراکز F و F' و شعاع a

رسم شوند دایره‌های و هر خطی را که از یک کانون

بیک نقطه M از بیضی وصل شود شعاع حامل می‌نامند .

۲- رسم بیضی - ۱) باحرکت متصل - دوسنجاقدردو

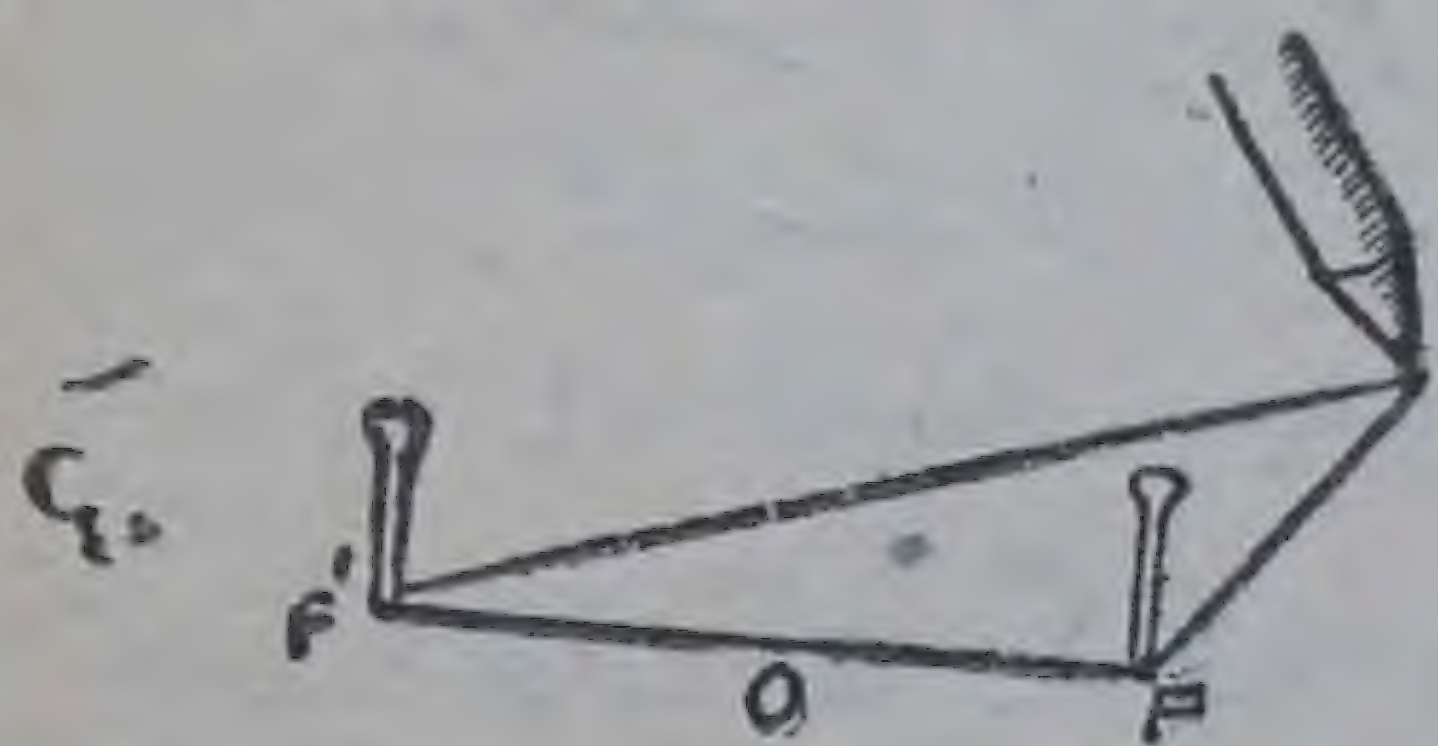
کانون کوبیده دوانتهای نخى بطول $2a + 2c$ را گره میزنیم
نخ را از پشت سنجاقها رد میکنیم و نوک مدادی را در داخل
آن چنان حرکت میدهیم که نخ همیشه کشیده شده باشد نوک

مداد بیضی رسم میکند (ش ۱ . ۲)

با نقاط یا بی F را مرکز قرار

داده باشعاع $2a < l$ قوسی رسم می-

کنیم بعد بمرکز F' و شعاع $2a - l$



قوسی میزنیم تا قوس اول را در M و M' قطع کند. این

نقاط متعلق به بیضی هستند. ۳) رسم بیضی بکمک حاشیه کاغذ-

اگر OA و OB نیمی از محورهای بیضی باشند (ش ۲) بر

روی لبه کاغذی مانند $PP'M$ طولهای

PM و $P'M$ را بترتیب مساوی a

و b جدا میکنیم و بعد کاغذ را بر

صفحه چنان می‌لغزانیم که همواره P

و P' بترتیب بر OA و OB (یا امتداد

آنها) باشند. M در روی بیضی تغییر

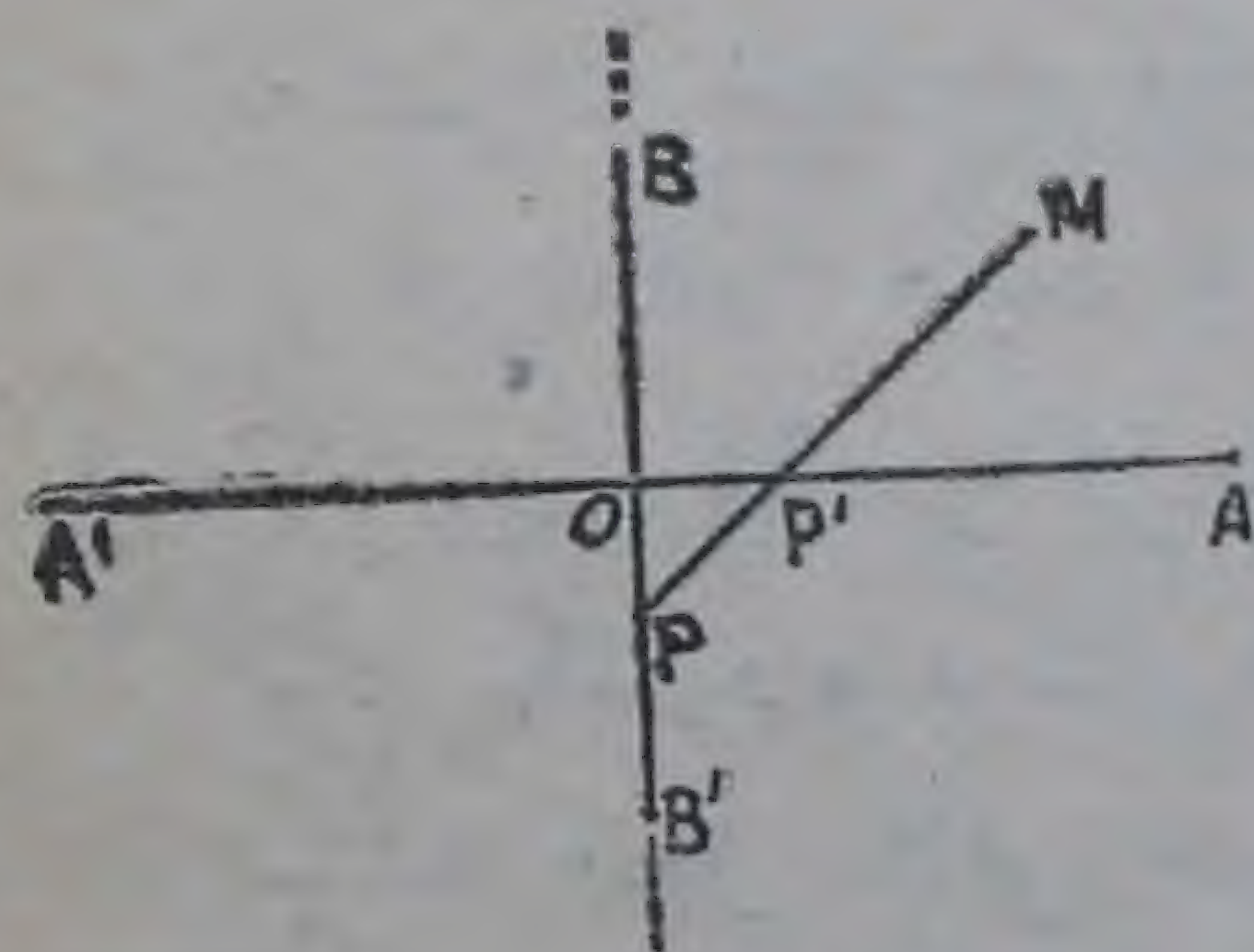
مکان میدهد (رجوع شود شماره ۲۱).

تبصره ۵ - بکمک حاشیه کاغذ میتوان با داشتن یک محور

و یک نقطه از بیضی محور دیگر را بدست آورد باینطریق که

اگر OA نصف محور معلوم و M نقطه معلوم باشند بمرکز

M و شعاع a قوسی میزنیم تا عمودی را که از O بر OA



ش ۲

M و M' قطع میکنند. M و M' جوابهای مسئله‌اند (اگر I روی دایره هادی F' واقع شود خط با بیضی مماس است و اگر I در درون دایره هادی افتد خط بیضی را قطع نمیکند).

مماس بر بیضی

۷- قضیه - مماس بر هر نقطه از بیضی گوشه بین يك شعاع حامل و امتداد شعاع دیگر را نصف میکند.

نتیجه - (۱) قرینه هر کانون نسبت به مماس بر روی دایره هادی کانون دیگر است (۲) مماس بر هر رأس عمودست بر محور.

۸- قضیه - قائم بر هر نقطه از بیضی گوشه بین دو شعاع حامل را نصف میکند.

نتیجه - مماس و قائم بر هر نقطه از بیضی FF' را به نسبت توافقی تقسیم میکنند.

۹ - قضیه - La Hire - تصویر هر کانون بر روی مماس واقعست بر روی دایره اصلی.

۱۰ - رسم مماس بر بیضی - (۱) از نقطه واقع بر بیضی : دو شعاع حامل را میکشیم، منصف گوشه خارجی آنها مماس مطلوبست.

(۲) از نقطه P خارج بیضی : بمرکز P و شعاع PF دایره‌ای میزنیم تا دایره هادی F' را در φ و φ' قطع کند، عمودهایی که از P بر $F\varphi$ و $F\varphi'$ فرود آیند دو مماس مطلوبند (شرط

امکان متقاطع بودن دایره مرسوم با دایره هادی F' است، یعنی باید P بیرون بیضی باشد) •

(۳) مماس موازی امتداد Δ : از F عمودی Δ فرود میآوریم تا دایره هادی F' را در φ و φ' قطع کند، عمود منصف های $F\varphi$ و $F\varphi'$ را رسم مینمائیم. مسئله همیشه دو جواب دارد.

۱۱ - نتیجه - وتر واصل بین نقاط تماس دو مماس موازی بر مرکز بیضی میگردد.

۱۲ - قضیه Poncelet (۱) اگر از P دو مماس بر بیضی رسم شود این دو مماس با PF و PF' گوشه های مساوی میسازند. (۲) خطی که از P یکی از دو کانون وصل شود منصف گوشه اشعه حاملی است که از این کانون بدو نقطه تماس منتهی گردند.

۱۳ - قضیه - مماس متحرکی که بین دو مماس ثابت بر بیضی محدود باشد از هر کانون بزائیه ثابتی دیده میشود.

۱۴ - قضیه - مکان نقاط برخورد دو مماس متعامد بر

بیضی دایره ایست بر مرکز O و شعاع $\sqrt{a^2 + b^2}$

۱۵ - قضیه (۱) حاصلضرب فواصل دو کانون از هر

مماس مساویست با b^2 ؛ (۲) اگر از یک کانون خطی موازی

مماس رسم کنیم تفاضل مربعات فواصل مرکز از مماس و از

خط مرسوم مساویست با b^2

۱۶ - قضیه Chasles - مکان نقاط برخورد دو مماس

متعامد بر دو بیضی متحدالکانونین بمحورهای a و b و a' و b' دایره ایست بمرکز O و شعاع :

$$\sqrt{a'^2 + b^2} \text{ یا } \sqrt{a^2 + b'^2}$$

شعاعهای حامل - معادله بیضی

۱۷ - قضیه - شعاعهای حامل هر نقطه M از بیضی

که فاصله تصویر آن بر محور اطول از مرکز بیضی x فرض شود بترتیب عبارتند از

$$a + \frac{cx}{a} \text{ و } a - \frac{cx}{a}$$

۱۸ - قضیه - اگر محورها بیضی محورهای

مختصات فرض شوند (محورا طول محور طولها) معادله بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{عبارتست از}$$

بیضی تصویر دایره است

۱۹ - قضیه - تصویر قائم دایره بر صفحه بیضی ایست

که طول محور اطول آن a و طول محور اقصی آن $a \cos \alpha$ (زاویه بین صفحه دایره و صفحه تصویر) میباشد.

۲۰ - قضیه - مساحت بیضی مساویست با πab

نتیجه - برای بدست آوردن مساحت هر جزء از بیضی

باید مساحت جزء نظیر آن را در دایره اصلی بدست آورد و در $\frac{b}{a}$ ضرب کرد.

۲۱ - قضیه - نسبت عرض نقاط مختلف بیضی بعرض

نقاط نظیر آنها از دایره اصلی مساوی مقدار ثابت $\frac{b}{a}$ است. (نقطه نظیر آنست که بانقطه مفروض در روی عمودی بر AA' واقع باشند)

۲۲ - رسم مماس - ۱) از يك نقطه M واقع بر بیضی -

نظیر نقطه مفروض را بر روی دایره اصلی یافته از آن مماسی بردایره اصلی رسم میکنیم و از محل تقاطع این مماس بامحور اطول بیضی به M وصل مینمائیم. ۲) از نقطه M خارج

بیضی - نقطه M' را که عرض آن $\frac{a}{b}$ عرض M باشد یافته

از آن مماس $M'T'$ را بردایره اصلی رسم میکنیم تا محور اطول را در I قطع کند MI مماس بر بیضی است و نقطه تماس واقع است در روی عمودی که از T' بر محور اطول فرود آید. ۳) مماس موازی امتداد $\triangle I - \triangle$ فصل مشترك \triangle را بامحور اطول بدست آورده نقطه M'

را هم که عرض آن $\frac{a}{b}$ يك نقطه M از \triangle باشد تعیین میکنیم

بر دایره اصلی مماسهائی موازی IM' میکشیم و در روی عمود هائیکه از نقاط تماس بر محور اطول فرود آیند نقاطی که

عرضشان بعرض نقاط مماس بر نسبت $\frac{b}{a}$ باشد تعیین نموده از

این نقاط خطوطی متوازی \triangle رسم میکنیم.

II هذلولی

۲۳ - تعریف - هذلولی مکان نقاطیست که تفاضل

فواصلشان از دو نقطه ثابت F و F' مساوی مقدار ثابت $2a$ باشد .
 سایر تعاریف مانند شماره ۱ (فقط) باید توجه کرد که
 محور اقصر هذلولی در حقیقت وجود ندارد و برای شباهتی که
 بین خواص بیضی و هذلولی هست خطی را که از وسط دو
 کانون بطول $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ بر محور شکل عمود شود محور اقصر
 مینامند (در هذلولی بجای محور اطول اغلب گفته میشود محور قاطع .
 اگر $b = a = \frac{c\sqrt{2}}{2}$ باشد هذلولی را متساوی المحورین
 میگویند .

۲۴- رسم هذلولی - ۱) با حرکت متصل : خط کشی

بطول ۱ را حول سنجاقی که در يك کانون فرورفته باشد دوران
 میدهیم ، نخى بطول $2a - 1$ اختیار میکنیم ، يك سر آنرا
 بانهای خط کش کوپیده سر دیگرش را در کانون دیگر ثابت
 نگاه میداریم . نوک مدادی که همواره نخ را بر خط کش
 متکی نگاهدارد قسمتی از هذلولی رسم میکند . ۲) با نقاط
 یابی : مانند بیضی با رسم قوسهائی بشعاعهائی 1 و $2a + 1$.

۲۵- قضیه - تفاضل فواصل هر نقطه درون هذلولی از

دو کانون بزرگتر و از آن نقاط بیرون هذلولی کوچکتر است
 از $2a$. و بعکس .

۲۶- قضیه - هذلولی مکان هندسی نقاطیست که از يك

کانون و دایره هادی کانون دیگر يك فاصله باشند (مکان

مرا کزد و ایریست که بر یک کانون بگذرند و بردایره کانون هادی دیگر مماس باشند).

۲۷- فصل مشترك خط و هذلولی - مانند فصل مشترك

خط و بیضی

مماس بر هذلولی

۲۸- قضیه - مماس بر هذلولی زاویه بین دو شعاع حامل را نصف میکند.

نتیجه ۱- رجوع شود بشماره ۷ (نتیجه ۱ و ۲)

نتیجه ۲- قائم بر هر نقطه از هذلولی زاویه بین یک شعاع حامل و امتداد شعاع دیگر را نصف میکند

نتیجه ۳- رجوع شود به شماره ۸ (نتیجه)

۲۹- قضیه - تصویر هر کانون بر روی مماس واقعست بردایره اصلی.

۳۰- رسم مماس - مانند شماره ۱۰. فقط باید توجه کرد که رسم مماس موازی امتداد معین فقط وقتی جواب دارد که عمودیکه از یک کانون بر آن امتداد فرود میآید دایره هادی کانون دیگر را قطع کند (یعنی عمود بر امتداد مفروض در داخل زاویه بین دو مماسی باشد که از یک کانون بردایره هادی کانون دیگر رسم میشوند).

۳۱- قضیه پونسله - مانند بیضی (شماره ۱۲)

۳۲- قضیه - عین خواص مندرج در شماره ۱۵

مجانبهای هذلولی

۳۳ - تعریف - (رجوع شود بشماره ۱۸۸ قسمت جبر)
- و نیز میتوان گفت مجانب هذلولی مماسی است که نقطه تماس آن
بینهایت دور باشد.

۳۴ - قضیه - هذلولی دو مجانب دارد که بر مرکز آن
میگذرند.

نتیجه ۱ - مجانبها نسبت بدو محور قرینه یکدیگرند
نتیجه ۲ - دو مجانب هذلولی عمودهای هستند که از O بر
مماسهایی که از F و F' بر دایره اصلی رسم میشوند فرود آیند.
۳۵ - قضیه - مجانبها دو قطر مستطیلی هستند که مرکز
 O و اضلاعش با دو محور موازی و بترتیب مساوی $2a$ و $2b$
باشند.

نتیجه ۱ - دو مجانب هذلولی متساوی المحورین بر هم
عمودند.

نتیجه ۲ - فاصله هر کانون از هر مجانب مساوی b است.

شعاعهای حامل - معادله هذلولی

۳۶ - قضیه - شعاعهای حامل هر نقطه هذلولی مساوی
هستند با :

$$\frac{cx}{a} - a \quad \text{و} \quad \frac{cx}{a} + a$$

(x فاصله O از عمود است که از نقطه مفروض بر محور قاطع
فرود آید)

۳۷ - قضیه - اگر نقطه O مرکز و محورهاى هذلولی محو و های مختصات باشند معادله هذلولی :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

میباشد

نتیجه - معادله هذلولی متساوی المحورین :

$$x^2 - y^2 = a^2$$

است

نتیجه ۲ - ۱ اگر مجانبهای هذلولی متساوی المحورین محورهاى مختصات فرض شوند معادله آن :

$$xy = \frac{a^2}{2} \quad \text{یا} \quad xy = \frac{c^2}{4} \quad \text{میباشد.}$$

III سهمی (شالجمی)

۳۸ - تعریف - سهمی مکان هندسی نقاطیست که از

يك نقطه، بنام **كانون**، و يك خط، بنام **هادی**، يك فاصله باشند. خطی که از كانون بگذرد و بر هادی عمود باشد محور، فاصله كانون از هادی پارامتر و خطوطی که یکی يك نقطه M را بکانون F وصل کند و دیگری از M بر هادی عمود باشد شعاعهای حامل نام دارند. محل تلاقی محور با سهمی **راس** آنست. تصویر قسمتی از مماس واقع بین نقطه تماس و امتداد محور بر محور را **تحت ظل** و تصویر قسمت مشابه از قائم را **تحت قائم** گویند.

۳۹ - رسم سهمی (۱ - باحرکت دائم - خط کشی در

مقابل هادی میگذاریم، يك سرنخی بطول يك ضلع گونیائیرا

بکانون و سر دیگر آنرا بنقطه تلاقی آن ضلع باوترگونیا ثابت نموده ضلع دیگر گونیا را متکی بخط کش می‌لغزانیم، نوک مدادی که نخ را همیشه بضلع گونیا متکی نگاهدارد قسمتی از سهمی را رسم می‌کند. ۲) ترسیم با نقطه یابی - از کانون بنقطه غیر مشخص N از هادی وصل می‌کنیم، عمود منصف FN عمودیرا که از N بر هادی اخراج شود در M قطع می‌کند، M واقعست بر روی سهمی. راه دیگر: F کانون و P محل تلاقی محور و هادی فرض میشوند، خط Δ را موازی هادی رسم می‌کنیم تا محور را در D تلاقی کند. بمرکز F و شعاعی مساوی PD قوسی می‌زنیم تا Δ را در M و M قطع کند، این دو نقطه بر روی سهمی هستند.

۴۰ - قضیه - هر نقطه درون سهمی بکانون نزدیکتر است تا بهادی و هر نقطه بیرون آن بهادی نزدیکترست تا بکانون و بعکس.

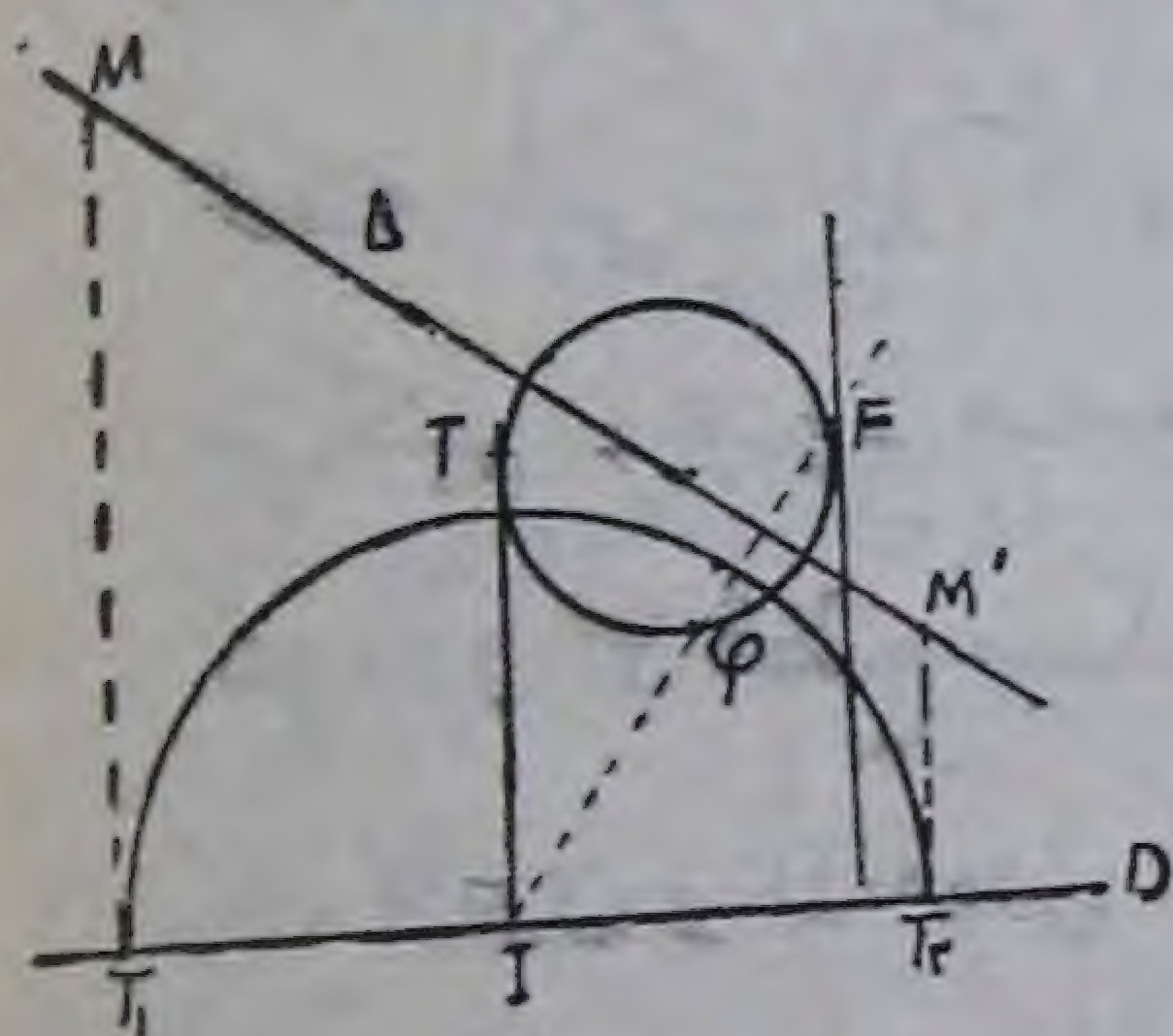
۴۱ - قضیه - خطی که از F بر هادی عمود شود محور تقارن سهمی است (بهمین جهت محور نامیده میشود).

۴۲ - قضیه - سهمی حد يك بیضی است که يك رأس و يك کانون آن ثابت بمانند ولی کانون دیگر در روی محور اطول بی نهایت دور شود.

تبصره - از قضیه فوق میتوان استفاده کرد و بسیاری از خواص سهمی را با استفاده از خواص مشابه در بیضی ثابت نمود.

۴۳ - فصل مشترك خط و سهمی - برای بدست

آوردن فصل مشترك خط Δ با يك سهمی که کانون و هادی آن F و (D) هستند (ش ۵) φ قرینه F را نسبت به Δ



(ش ۵)

یافته دایره‌ای رسم میکنیم که بر F و φ بگذرد و بر (D) مماس شود، مرکز این دایره فصل مشترك سهمی با Δ است. بر حسب آنکه φ و F يك طرف (D) واقع شوند یا بر (D) قرار گیرد خط سهمی را دو جا قطع میکند یا بر آن مماس است. اگر φ آن طرف (D) واقع شود خط منحنی را قطع نمی نماید.

مماس بر سهمی

۴۴ - قضیه - مماس بر سهمی منصف زاویه بین دو

شعاع حامل است.

نتیجه ۱ - قرینه کانون نسبت بهر مماس بر خط هادی

واقع است.

نتیجه ۲ - اگر از F خطی بر شعاع حامل نقطه تماس

عمود کنیم، این خط بر محل تلاقی مماس با هادی میگذرد.

نتیجه ۳ - قائم بر سهمی منصف زاویه بین يك شعاع حامل

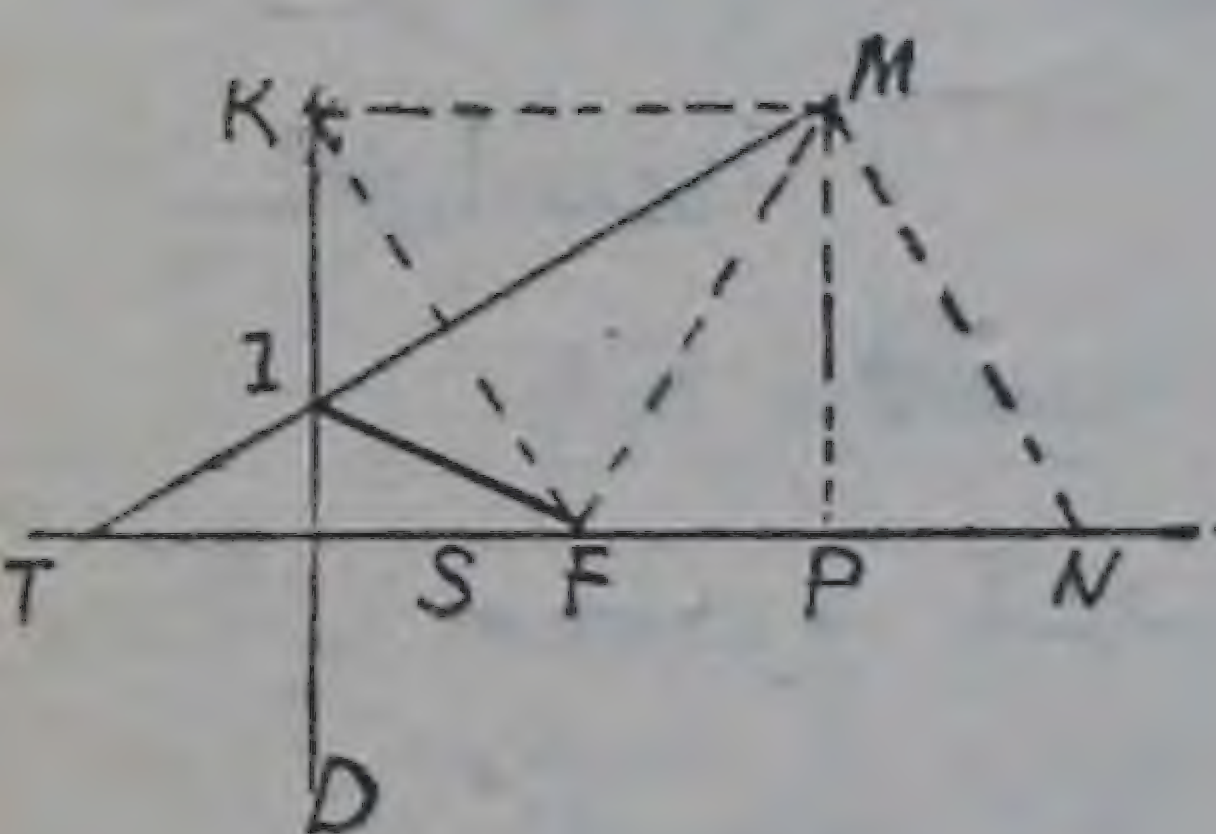
و امتداد دیگر است.

۴۵ - قضیه - مماس بر راس مکان تصاویر کانون بر

مماسهای بر سهمی است.

۴۶ قضیه - ۱) راس سهمی تحت قائم را بدو جزء مساوی تقسیم میکند (۲۰) تحت قائم مساوی پارامتر (ممیز) سهمی است. نتیجه - کانون سهمی از نقاط برخورد مماس و قائم هر نقطه با محور يك فاصله است.

۴۷- رسم مماس بر سهمی (۱) از نقطه M واقع بر منحنی : از M منصف زاویه بین MP و عمودیرا که از M بر هادی فرود آید رسم میکنیم (ش ۶) راه دیگر :



FT را مساوی FM بر محور نقل
میکنیم، MT مماس مطلوبست. راه
سوم: ST را مساوی SP جدا میکنیم
MF مماس است. راه چهارم: عمود بر
MT هادی را در ۱ قطع میکند M۱ جواب
مسئله است: راه پنجم: از خاصیت تحت

قائم استفاده میشود ، یعنی PN را مساوی پارامتر جدا میکنیم
و MT را بر MN عمود مینمائیم (۲) از نقطه M خارج سهمی :
بمرکز M و شعاع MF قوسی میزنیم تا هادی را در φ قطع کند
عمودی که از M بر $F\varphi$ رسم شود جواب مسئله است . (۳) مماس
بموازات امتداد Δ : از F عمودی بر این امتداد فرود میآوریم
تا هادی را در φ قطع کند ، عمود منصف $F\varphi$ مماس مطلوب است .
۴۸- قضیه مکان نقاطی که از آنها بتوان دو مماس عمود
برهم بر سهمی رسم کرد خط هادیست .

نتیجه ۱) خطی که بر نقاط تماس دو مماس متعامد بگذرد

بر کانون میگذرد (۲) قطعه‌ای از يك مماس متحرك محصور بين نقطه تماس و خط هادی از کانون بزاویه قائمه دیده میشود.

۴۹- قضیه- خطی که از محل تقاطع دو مماس موازی محور رسم شود بروسط خط واصل بين نقاط تماس میگذرد.

۵۰- قضیه- پونسله (۱) مماسهائیکه از يك نقطه M بر

سه می رسم شوند با خطی که این نقطه را بکانون ربط میدهد و با عمودیکه از M بر هادی فرود میآید گوشه‌های مساوی میسازند (۲) FM منصف گوشه بين شعاعهای حامل دو نقطه تماس است

۵۱- قضیه- قسمتی از مماس متحرك که بين دو مماس

ثابت محصور باشد از کانون بگوشه ثابتی دیده میشود.

نتیجه- اگر سه مماس بر سه می یکدیگر را در M و N و

P قطع کنند دایره MNP بر کانون سه می میگذرد.

شعاع حامل، معادله، مساحت سه می.

۵۲- قضیه- هر گاه راس سه می را مرکز مختصات،

محور آنرا محور طولها و مماس بر راس را محور عرض ها فرض کنیم:

(۱) شعاع حامل هر نقطه بطول x مساویست با $x + \frac{p}{2}$

(۲) معادله سه می عبارتست از $y^2 = 2px$

۵۳- قضیه- سطح قسمتی از سه می محصور بين منحنی

و عمودی که بر محور رسم شود $\frac{2}{3}$ سطح مستطیلی است که

فواصلشان از کانون و هادی ثابتی، ثابت و بزرگتر از ۱ میباشد.

(۳) سهمی مکان هندسی نقاطیست که نسبت c و a ، فواصلشان از کانون و هادی ثابتی مساوی ۱ میباشد.

($\frac{c}{a}$ خروج از مرکز منحنی است. در بیضی و هذلولی بازاء هر کانون يك هادی وجود دارد که وابسته بآن کانون است) پس بیضی و هذلولی و سهمی مکان هندسی نقاطی هستند که نسبت فواصلشان از نقطه ثابتی و خط ثابتی مقداری است ثابت.

۵۷ — قضیه — منصف یکی از زاویه‌های حادث بین دو خط که کانون F را بدو نقطه M و M' از يك بیضی، هذلولی یا سهمی وصل میکنند بر محل تلاقی $M'M$ با هادی \triangle میگذرد.

نتیجه ۱ — قطعه‌ای از مماس بر بیضی، هذلولی یا سهمی محصور بین هادی و نقطه تماس از کانون یزاویه قائمه دیده میشود.

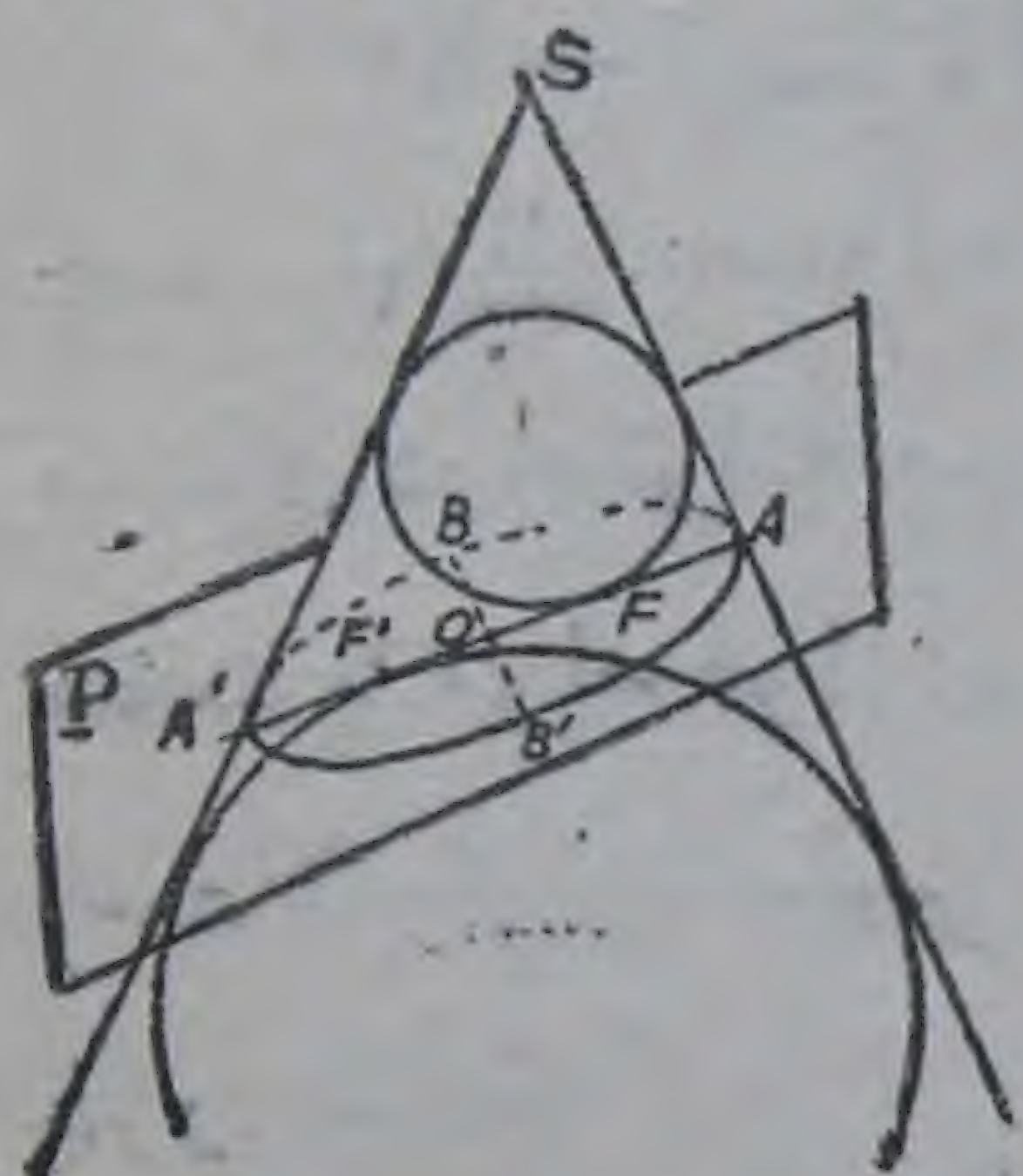
نتیجه ۲ — اگر از يك نقطه P واقع بر هادی دو مماس PT و PT' بر بیضی، هذلولی یا سهمی رسم کنیم وتر TT' بر کانون میگذرد و PF عمود است بر TT' .

۵۸ — رسم مماس — برای اینکه از نقطه T واقع بر یکی از منحنیهای سه گانه مماسی بر آن رسم کنیم کافیست از T به F وصل نمایم و عمودی بر FT بکشیم تا هادی را در P

قطع کند. PT مماس مطلوب است.

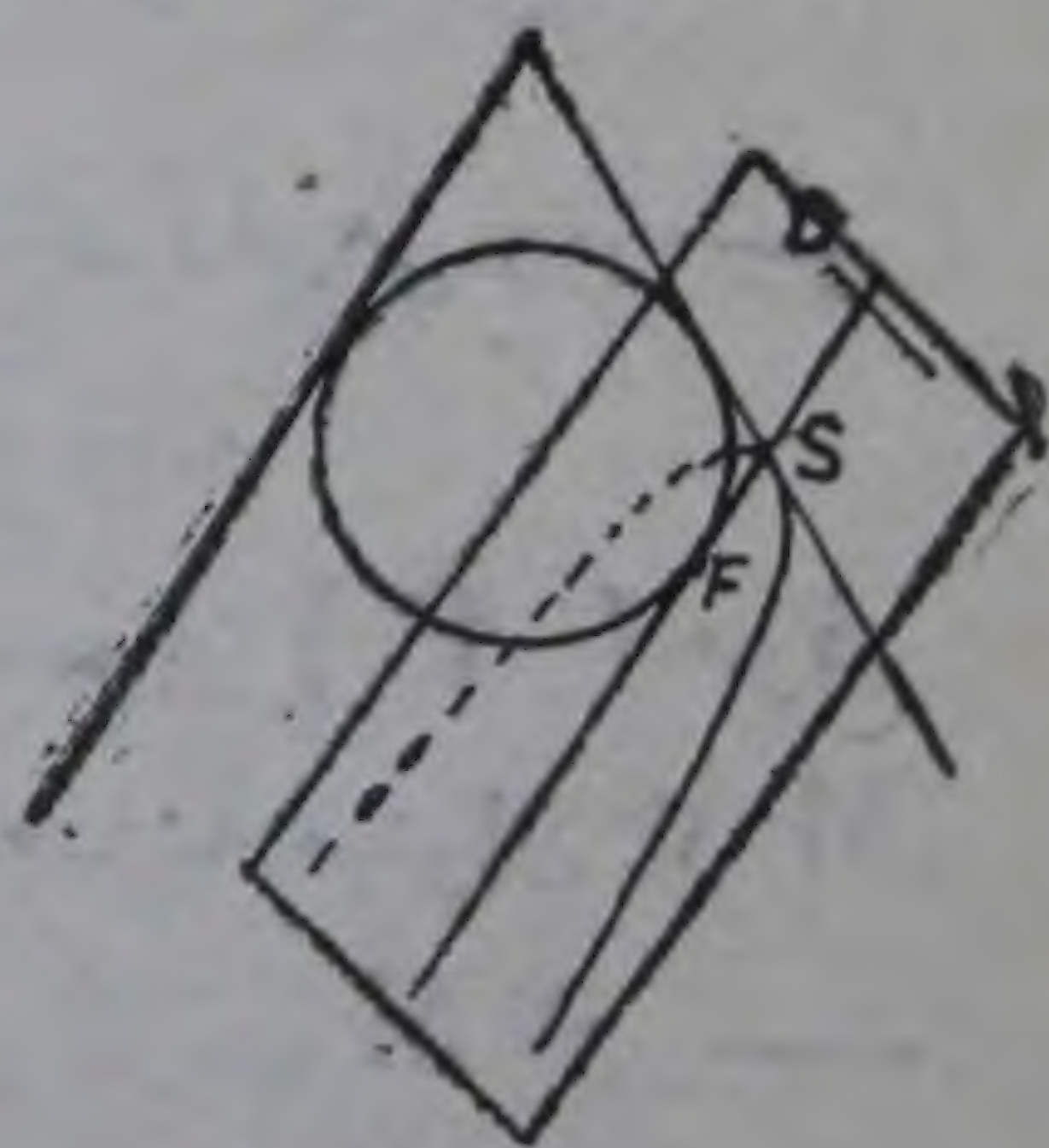
۲- مقاطع مخروطی

۵۹- قضیه داندلن - هر گاه صفحه‌ای مخروط مستدیری

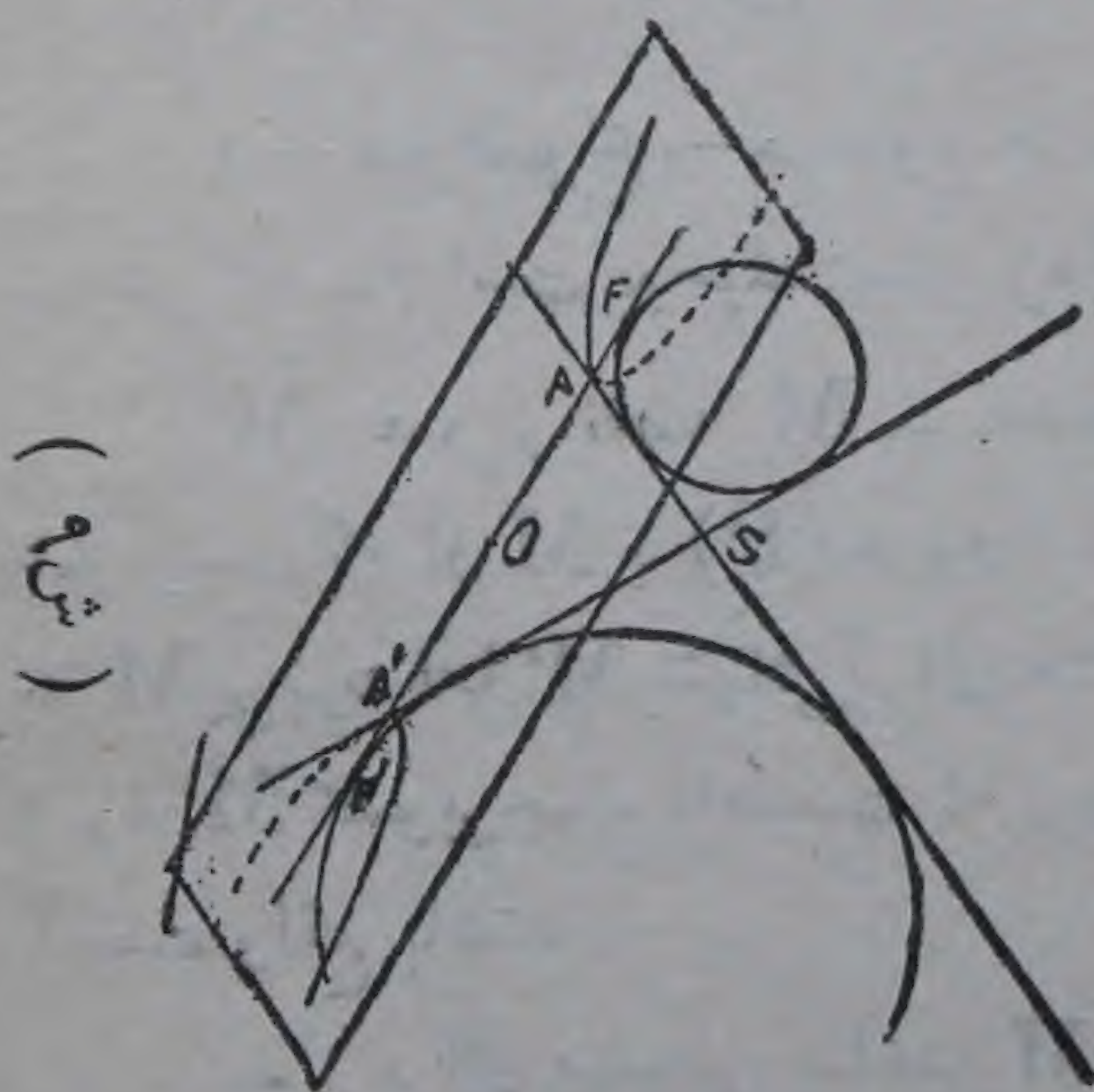


(ش ۸)

را قطع کند: ۱) اگر همه مولدهای آنرا در يك طرف راس تلاقی کند مقطع يك بیضی است (ش ۸) ۲) اگر امتداد بعضی از مولدها را قطع نماید (دو دامنه مخروط را قطع کند) مقطع هذلولی است (ش ۹) ۳) اگر صفحه موازی يك مولد باشد مقطع سهمی است (ش ۱۰)



«ش ۱۰»



(ش ۹)

۶۰- تبصره ۱۵- اگر صفحه قاطع عمود بر محور مخروط

مستدیر باشد مقطع دایره است.

۶۱- تبصره ۲- بمناسبت اینک بیضی و هذلولی و سهمی

مقاطع صفحه در مخروط هستند آنها را مقاطع یا قطعات مخروطی یا بطور خلاصه مخروطات گویند بیضی را **قطع ناقص**، هذلولی را **قطع زائد** و سهمی را **قطع مکافی** نیز مینامند.

۶۲ - تبصره ۳ - اگر رأس مخروط بینهایت دور شود جسم تبدیل باستوانه مستدیر میگردد. پس مقطع صفحه مستوی در استوانه مستدیر نیز بیضی است، مگر وقتی که صفحه با مولد موازی باشد که در این صورت مقطع دو خط مستقیم است (یعنی یک سهمی که پارامترش صفر و کانونش بی نهایت دور است).

هندسه رقومی و هندسه ترسیمی

۱ - موضوع - موضوع هندسه های رقومی و ترسیمی نمایش اجسام است بوسیله تصاویر قائم آنها.

M' تصویر نقطه M بر صفحه تصویر (P) موقع عمود است که از M بر (P) فرود آید. همیشه میتوان از M به M' پی برد اما M' بتنهائی برای مشخص کردن M کافی نیست زیرا M' تصویر جمیع نقاطیست که بر روی عمودی که M' موقع آنست واقع باشند.

پس برای مشخص ساختن M باید علاوه بر M' عامل دیگری در دست باشد.

این عامل ممکنست **رقوم** M یعنی فاصله M از صفحه مقایسه باشد (موضوع هندسه رقومی) یا تصویر دیگری از

M بر صفحه دیگر (موضوع هندسه ترسیمی)

بنابر این موضوع هندسه رقرمی نمایش اجسام است
بوسیله تصاویرشان بر يك صفحه و فاصله نقاط مختلفشان از
این صفحه . موضوع هندسه ترسیمی نمایش اجسام است بوسیله
تصاویرشان بر دو صفحه مشخص .

۱ - اصول هندسه رقرمی

I - نقطه

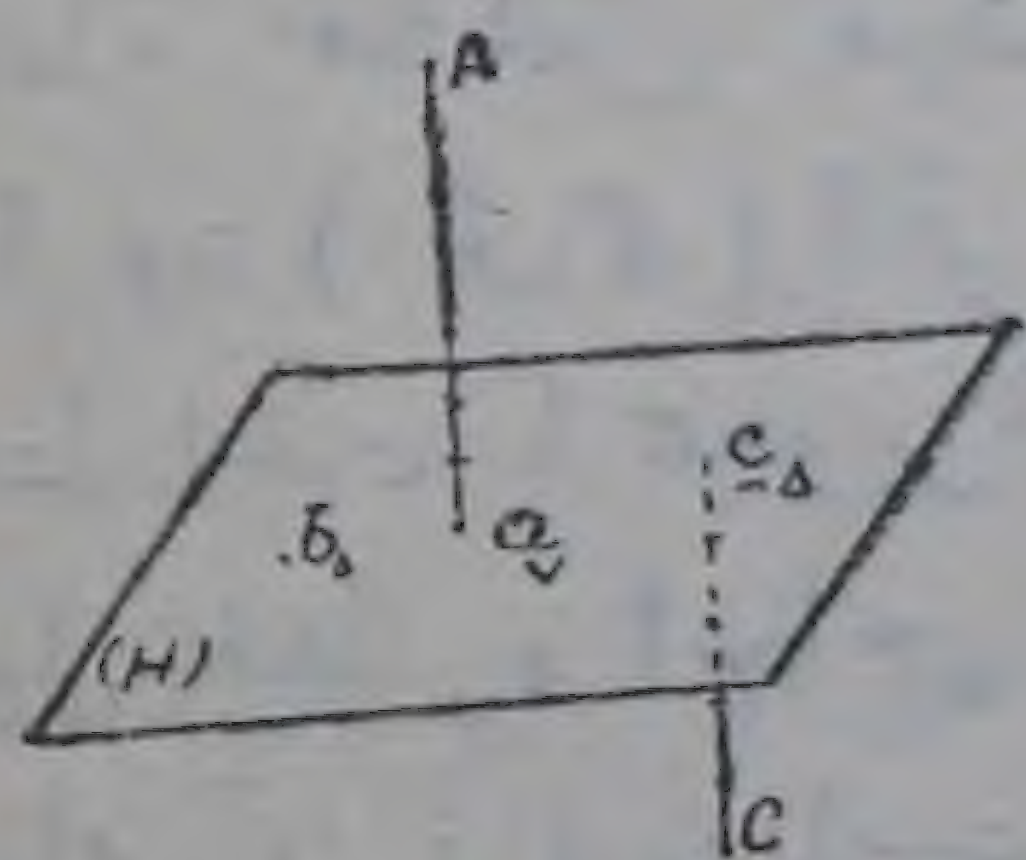
۲ -- نقطه بوسیله تصویر و فاصله اش از صفحه افق (صفحه
مقایسه) مشخص میشود . تصویر نقطه را با حروف لاتینی
کوچك و رقوم آنرا بشکل اندیس زیر آن نمایش میدهند مانند
نقطه a_v (ش ۱) رقومها در صفحه مقایسه صفر ، زیر آن منفی و
بالای آن مثبت میباشند .

تصویر نقطه و رقوم آن را
ملخص نقطه میگویند . ملخص هر
شکل شکلی است که از ملخصهای
نقاط مختلف آن پدید آمده باشد .

۳ - مقیاس — چون اجسام را
بایجاد حقیقی نمیتوان نمایش داد ناچار
ابعاد آنها را ده ، صد ، هزار ،

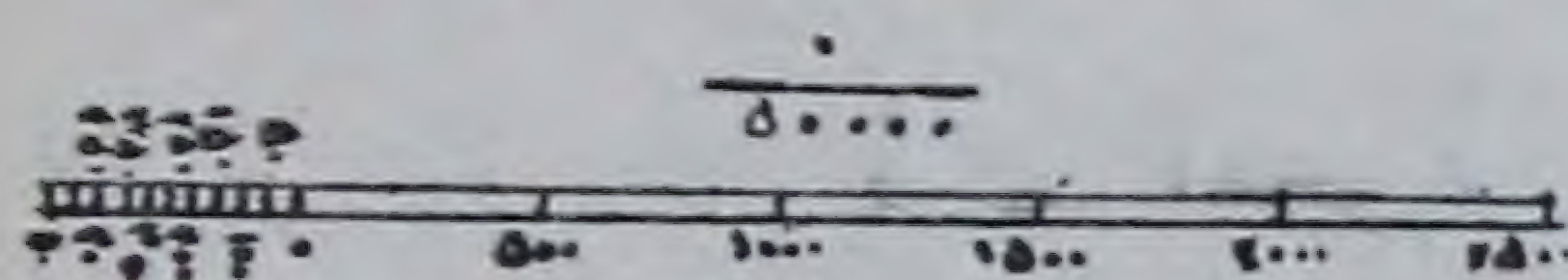
مرتبه كوچك میکنند . مقیاس نسبت تصویر را بجهتم نمایش
میدهد . مقیاس عددی ، بایك عدد بیان میکند که ابعاد چند

مرتبه كوچك شده اند ! مثال : $\frac{1}{1000}$ ، $\frac{1}{80000}$.



(ش ۱)

مقیاس خطی عبارت از خطی است که واحد طول را پس از کوچک کردن چند بار بر آن نقل کرده اند و جزء اول سمت چپ آنرا که پاشنه مقیاس میگویند با جزاء کوچکتر تقسیم نموده اند (ش ۲)



(ش ۲)

شکل ۲ مقیاس خطی

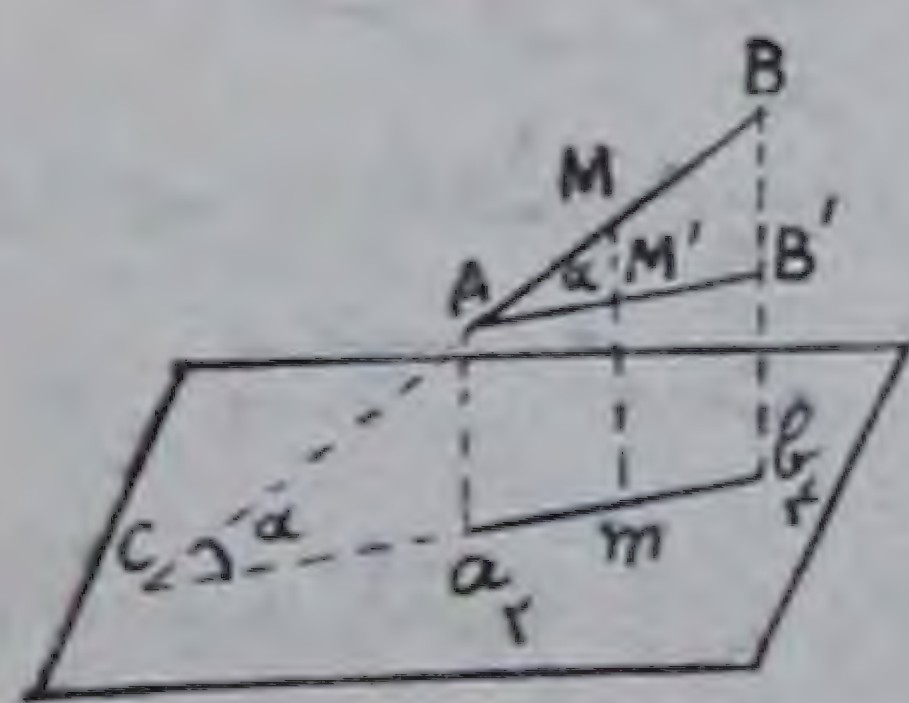
۱
۵۰۰۰۰ را نمایش میدهد

که در آن هر سانتیمتر معرف

۵۰۰ متر است. برای تعیین فاصله دو نقطه در روی نقشه با پرگار فاصله آنها را بر روی مقیاس نقل نموده میخوانند.

II - خط مستقیم

۴ - تصویر خط مستقیم خط مستقیم است و بوسیله دو



(ش ۳)

نقطه مشخص میشود مانند خط
a۴ b۴ (ش ۳) اثر خط فصل مشترك
خط است با تصویرش. شیب خط ظل
میل خط و اساس یا فراز خط ظل
تمام آن زاویه است :

$$\text{شیب} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BB'}{AB'} = \frac{MM'}{AM'} = \frac{1}{am}$$

$$\text{اساس} = \operatorname{Cotg} \alpha = \frac{BA}{BB'} = \frac{AM'}{MM'} = am$$

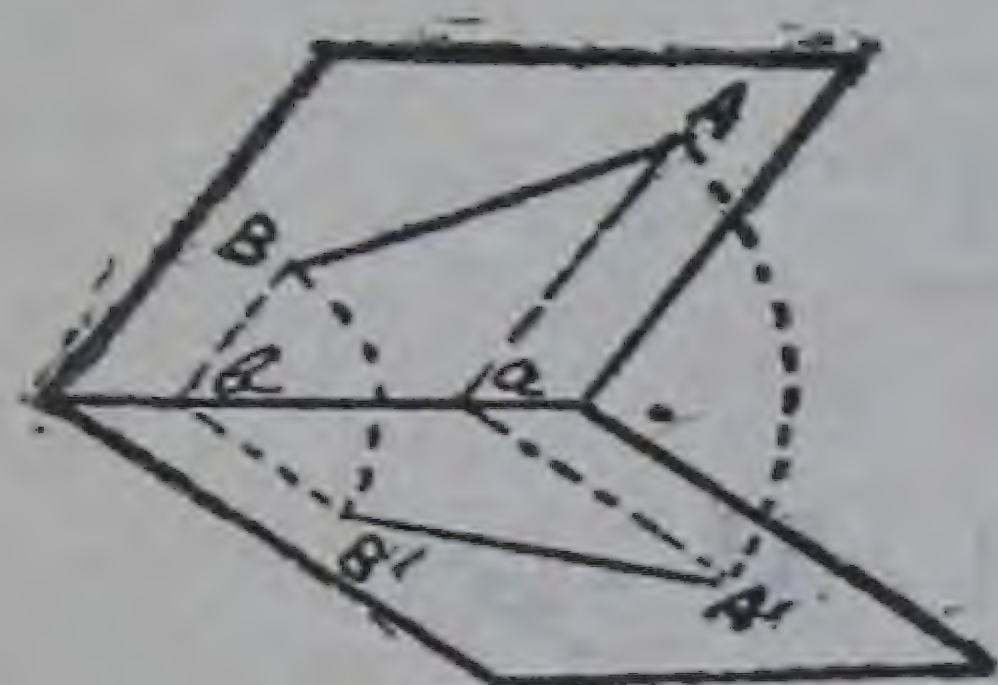
پس اساس خط فاصله تصاویر دو نقطه از خط است

که اختلاف رقومشان ۱ باشد و شیب عکس اساس میباشد.

خطی را که نقاط صحیح الرقوم بفاصله اساس بر آن معین شده باشد مدرج گویند.

۵ - خط افقی همه جا دارای يك رقوم است. تصویر خط قائم يك نقطه است.

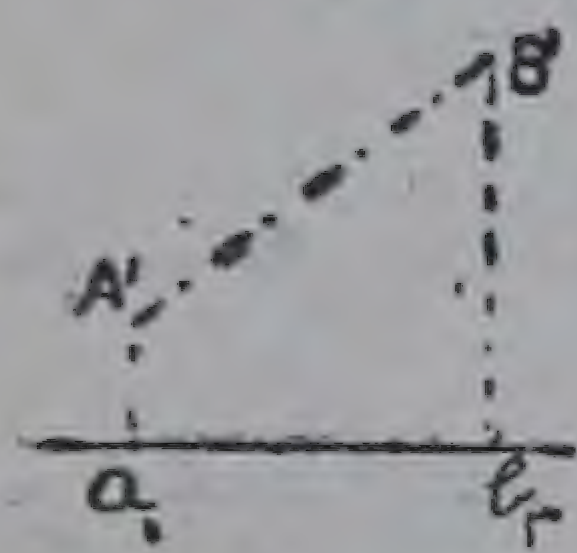
۶ - تسطیح صفحه قائم بر افق یعنی صفحه قائم را حول



(ش ۴)

يك خط افقی بنام لولا باندازه ۹۰ درجه دوران دهیم تا موازی صفحه افق شود. اگر رقوم لولا صفر باشد صفحه قائم بعد از دوران بر صفحه افق منطبق میشود (ش ۵) هر نقطه مانند A از

صفحه قائم بوضع A' در میآید و $A'a$ مساوی رقوم نقطه و عمود بر لولا است.



(ش ۵)

پس برای تسطیح خطی کافیست از دو نقطه آن (ش ۵) دو عمود بر تصویر خط اخراج کنیم و مساوی رقوم آن نقاط بر عمود ها جدا نمائیم و نقاطی را که بدست میآیند بهم وصل کنیم.

۷ - عکس عمل تسطیح را ترفیع مینامند.

۸ - تعیین شیب و اساس خط - فاصله تصاویر دو نقطه

که اختلاف رقومشان ۱ باشد اساس خط است (ش ۶). برای بدست آوردن شیب عکس اساس را میسازیم.



(ش ۶)

۹ - تعیین رقوم نقطه ای از

خط - ۱) بكمك تسطیح : تسطیح

نقطه را بر تسطیح خط بدست میآوریم

و $M'm$ را که مساوی رقوم آنست
اندازه میگیریم .

(۲) با محاسبه :

$$\frac{M'M'}{BB'} = \frac{A'M'}{A'B'} = \frac{am}{ab}$$



(ش ۲)

یا

$$\frac{\text{رقوم } M - \text{رقوم } A}{\text{رقوم } B - \text{رقوم } A} = \frac{am}{ab}$$

رقوم M را که مجهولست بدست میآورند (ش ۲)

عکس مسئله هم بدوراه مذکور قابل حل است .

۱۰- تعیین زاویه خط با صفحه مقایسه - ۱) بکمک

تسطیح (۲) بکمک محاسبه یا استفاده از شیب یا اساس

۱۱- فاصله دو نقطه - ۱) بکمک تسطیح (۲) بکمک

محاسبه یا استفاده از طول تصویر و اختلاف رقوم های
دو نقطه .

وضع دو خط

۱۲- دو خط موازی - دارای تصاویر موازی، اساس-

های مساوی و ترقی رقوم در یک جهت هستند .

۱۳- دو خط متقاطع - تصاویرشان متقاطعند و نقطه تقاطع

در روی هر دو تصویر یک رقوم دارد .

هر گاه تصاویر دو خط ab و cd یکدیگر را در خارج

حدود شکل قطع کنند دو خط ca و bd را رسم میکنیم ، اگر

این دو خط متوازی یا متقاطع باشند دو خط ab و cd متقاطعند

و گرنه متناظرند.

رقوم نقطه تقاطع با محاسبه بدست میآید. بهتر اینست که چهار نقطه دو بدو متحد الرقوم دو خط را بهم وصل کنیم، اگر دو خط واصل موازی شوند دو خط مفروض متقاطع خواهند بود.

III - صفحه ۴

۱۴ - صفحه با سه نقطه یا دو خط متوازی یا متقاطع مشخص میشود.

۱۵ - صفحه افقی همه جا يك رقوم دارد. تصویر صفحه قائم يك خط است (اثر صفحه).

۱۶ - افقیه های صفحه مقاطع آتند با صفحات موازی با افق. پس همه با یکدیگر موازیند. برای رسم يك افقیه کافست دو نقطه متحد الرقوم از صفحه را بهم وصل کنیم.

۱۷ - خط بزرگترین شیب صفحه آن است که با تصویرش بزرگترین زاویه ای را بسازد که خطوط صفحه با تصاویرشان میسازند.

خط بزرگترین شیب صفحه عمودست بر افقیه ها. پس تصویر آن هم بر تصاویر افقیه ها عمودست.

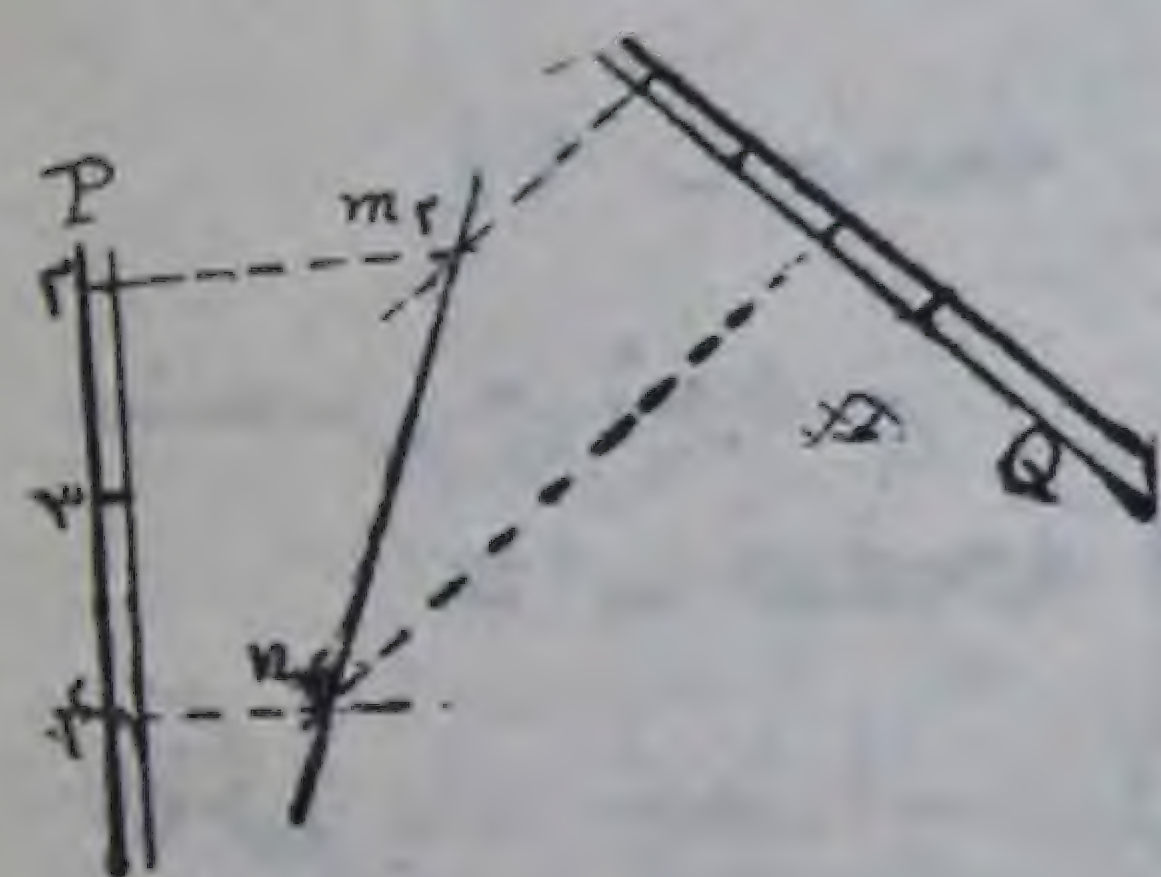
خط بزرگترین شیب بتنهایی برای نمایش دادن صفحه کافست (زیرا امتداد افقیه ها را بدست میدهد). پس برای نمایش صفحه خط بزرگترین شیب آنرا که مدرج شده باشد بدو خط موازی نمایش میدهم (ش ۸). این خط را مقیاس شیب صفحه میگویند؟

م
پ
ش
(ش ۸)

۱۸- توازی خط و صفحه - خط وقتی با صفحه موازیست که بایکی از خطهای آن متوازی باشد.

۱۹- توازی دو صفحه - دو صفحه وقتی متوازیند که دو خط متقاطع یکی با دو خط از دیگری موازی باشند. برای موازی بودن دو صفحه کافیست مقیاس شیبهای آنها متوازی باشند.

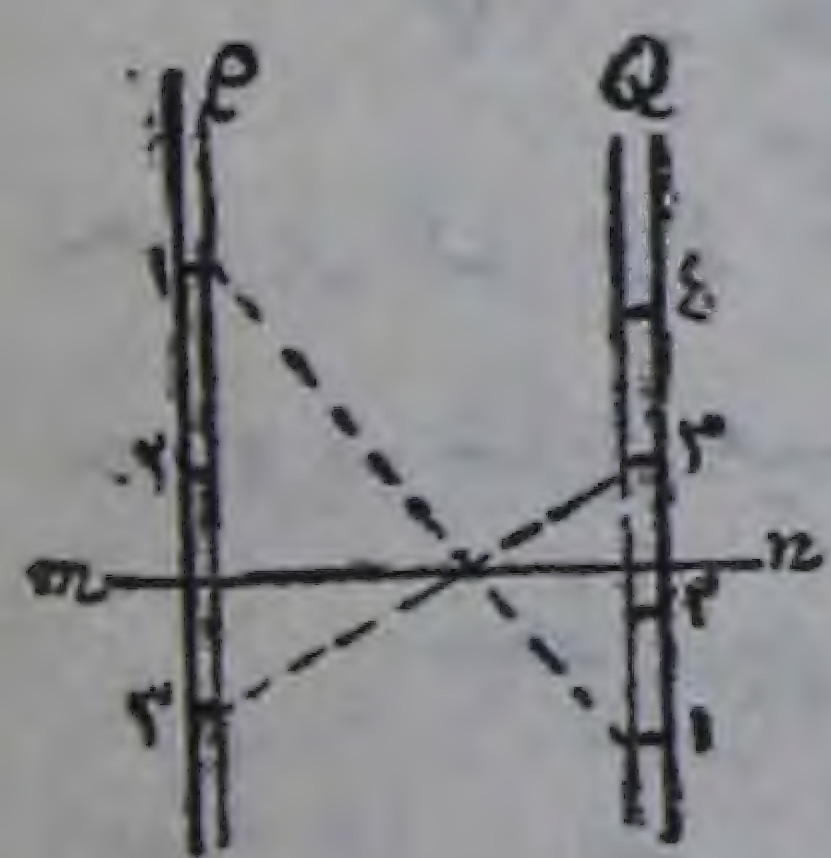
۲۰- تقاطع صفحات - برای پیدا کردن فصل مشترك



دو صفحه چهار اقیه دو بدو هم رقوم آن ها را امتداد میدهیم تا همدیگر را در نقطه m و n قطع کنند $m_1 n_1$ فصل مشترك دو صفحه است (ش ۹)

هر گاه تصاویر مقیاس شیب های

دو صفحه موازی باشند چهار نقطه دو بدو متحد الرقوم آنها را بهم وصل میکنیم تا یکدیگر را در a تلاقی کنند.



اقیه ای که بر a بگذرد فصل مشترك مطلوب است (ش ۱۰)

(ش ۱۰)

۲۱- تقاطع خط و صفحه - برای بدست

آوردن فصل خط مشترك $a_1 b_1$ و صفحه P

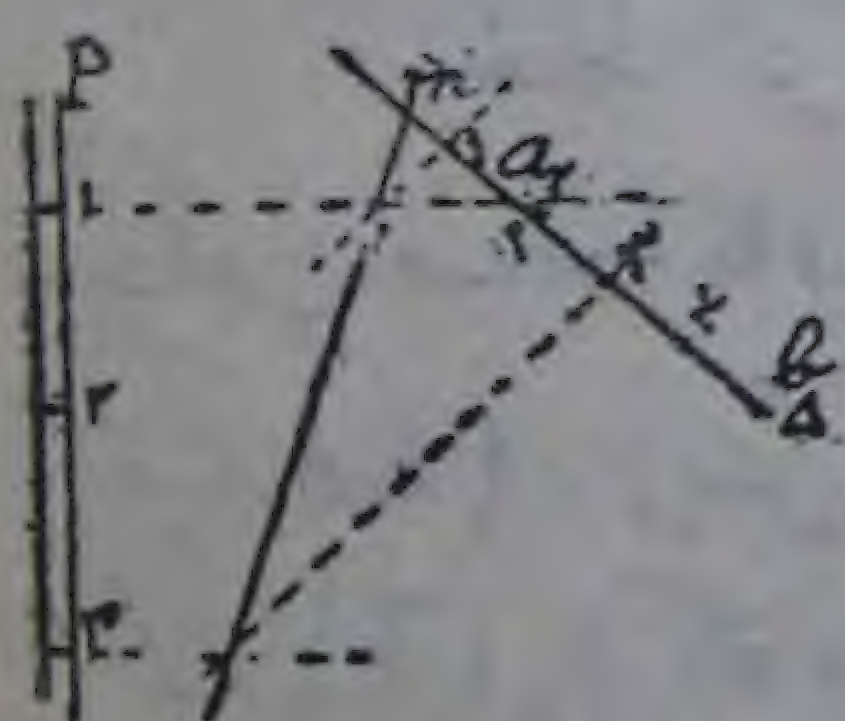
(ش ۱۱) بر خط يك صفحه اختیاری مرور میدهیم

و بكمك اقیه های ۱ و ۳ آن فصل مشترك

را با صفحه P بدست میآوریم. این فصل

مشترك خط ab را در m قطع میکند.

m محل تلاقی ab با صفحه P است.



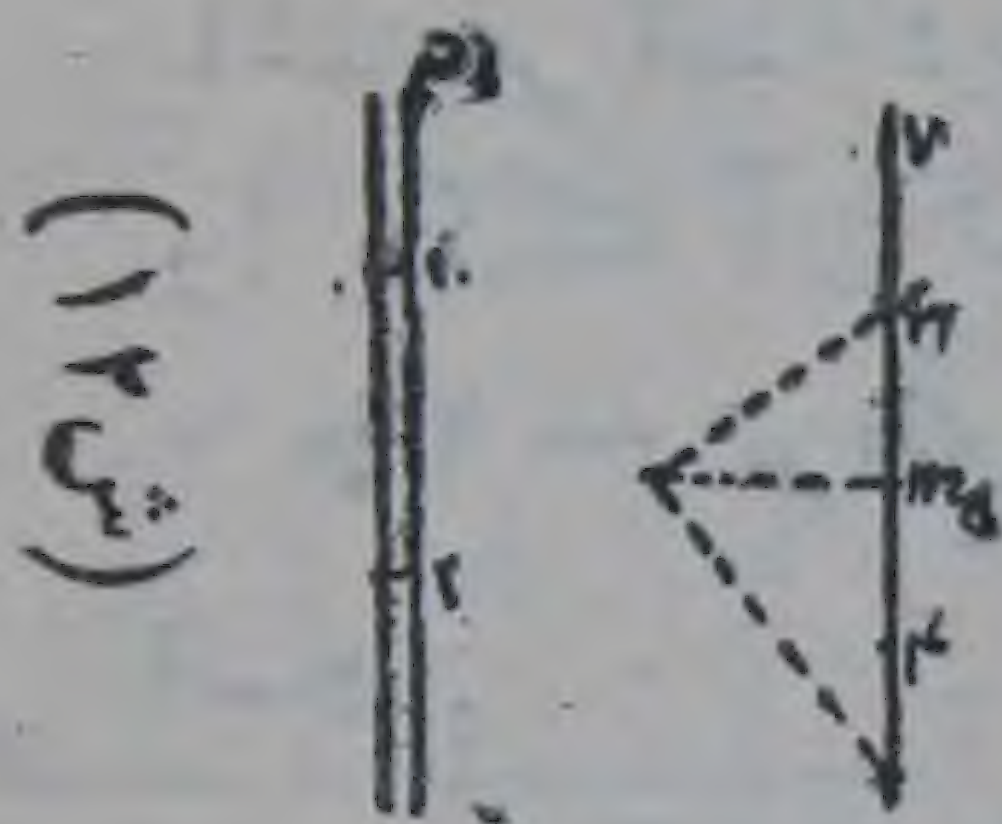
(ش ۱۱)

۲۲- خط عمود بر صفحه -

قضیه-ا اگر خطی بر صفحه ای عمود باشد تصویرش موازی مقیاس شیب صفحه، شیبش عکس شیب آن و ترقی رقومش در جهت عکس ترقی رقوم آن میباشد. مانند خط

ab و صفحه P (ش ۱۲)

IV = تسطیح



۲۳ - تسطیح يك شكل مستوی عبارت از

آنستکه صفحه شکل را حول يك خط افقی خود، بنام لولا، آنقدر دوران دهیم تا موازی صفحه افق شود.

اگر صفحه P حول افقیه رقوم

AB دوران کند وضع يك نقطه

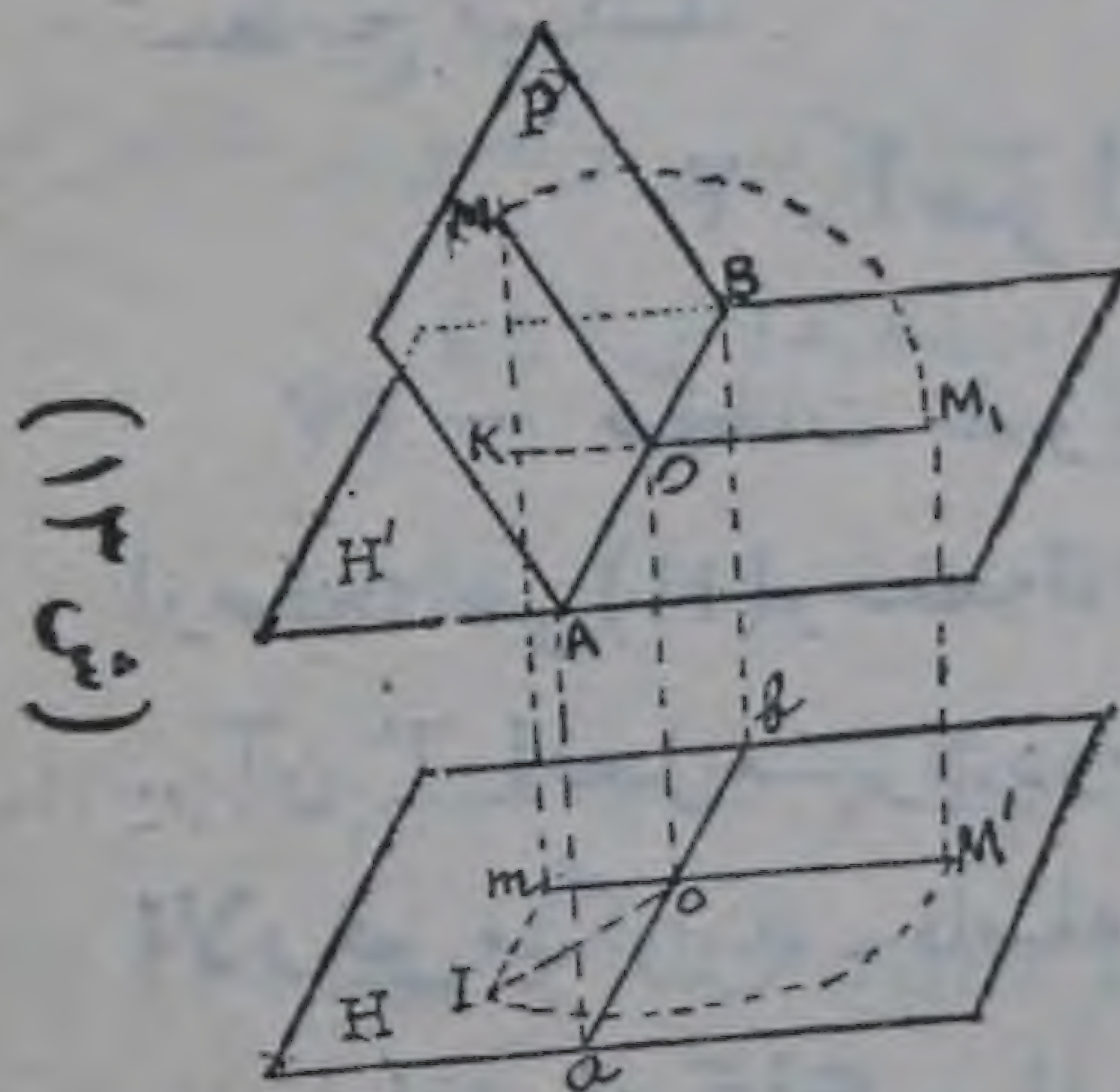
M از آنرا در نظر میگیریم. m

تصویر M است و بعد از دوران

بوضع M_۱ در میآید (ش ۱۳) که

تصویر آن (یا با اصطلاح تسطیح

M نقطه M' است.



وتر سه بر قائم $OM' = OM_1 = OM = OMK$

بعلاوه OM' موازی OM و عمودست بر ab پس تسطیح

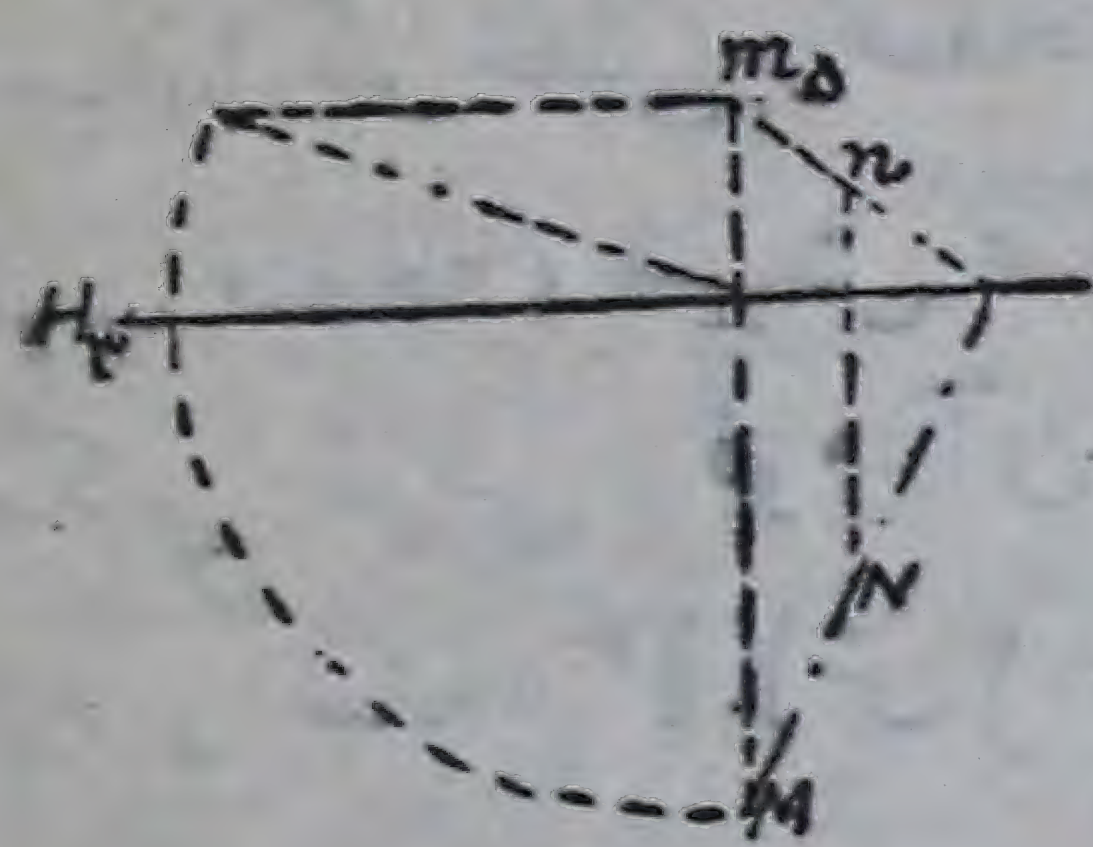
نقطه بر روی عمود است که از تصویر نقطه بر لولا فرود آید و فاصله آن از لولا مساوی وتر سه بر قائمی است که يك ضلعش

(KO) مساوی فاصله تصویر نقطه از لولا و ضلع دیگرش (KM)

مساوی اختلاف ارتفاع نقطه و لولا باشد.

پس تسطیح نقطه m در حول لولای a و b نقطه M' است

(ش ۱۴)



این قاعده را قاعده سه به سه قائم گویند. چون m و تسطیحش در دست باشند هر نقطه دیگر مانند n (ش ۱۴) را بکمک آن تسطیح میکنیم.

۲۴ - ترفیع عکس عمل تسطیح

است.

(ش ۱۴)

۲۵ - برای اینکه در روی شکلی ابعاد و زوایا بمقدار حقیقی معلوم شوند باید آنرا تسطیح کرد.

۲۶ - صفحه را عموماً حول یکی از افقیه های آن تسطیح میکنند.

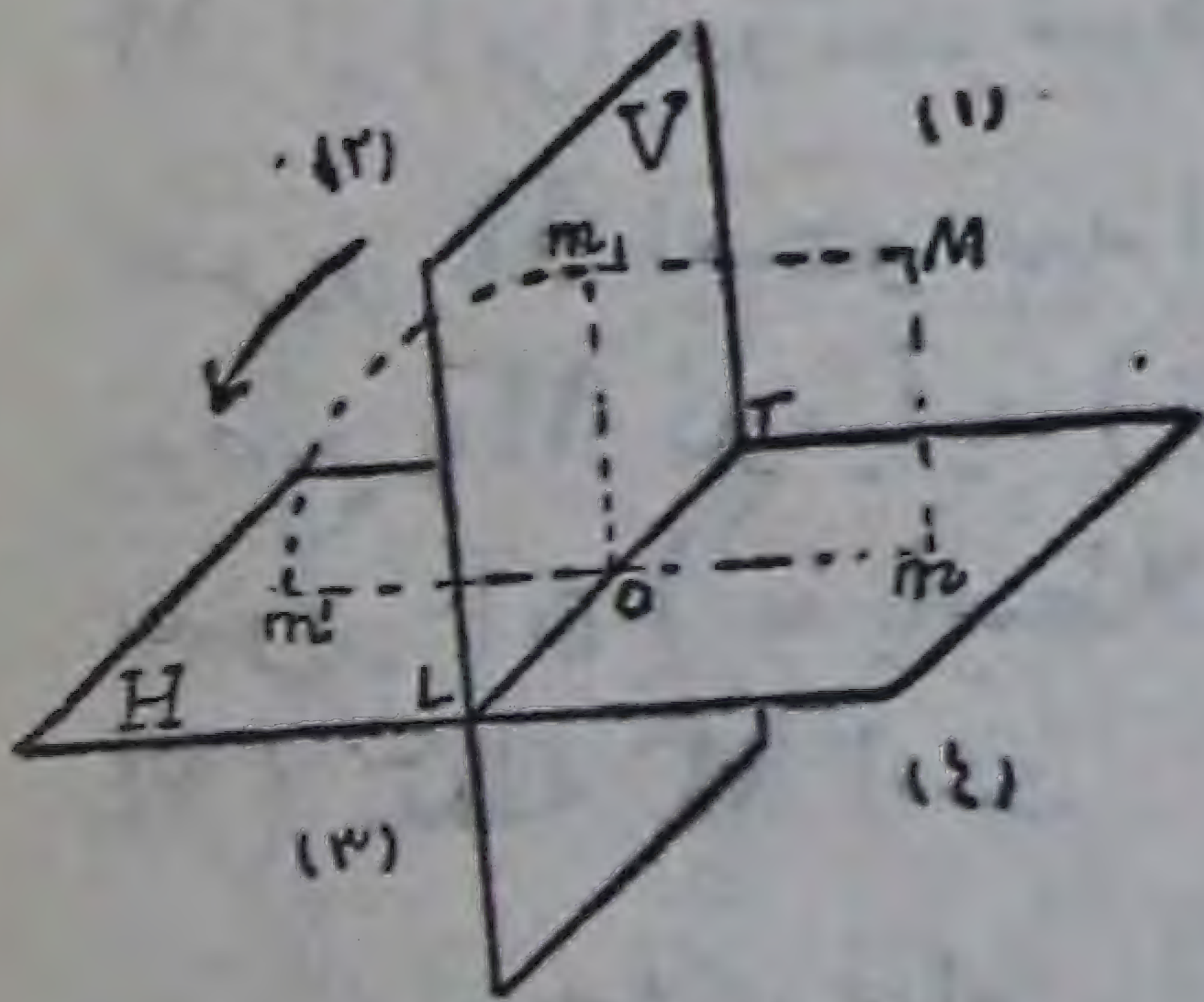
۲ - اصول هندسه ترسیم

۲۷ - صفحات تصویر عبارتند

از صفحه افقی (H) و صفحه قائم (V) عمود بر آن. LT فصل مشترک در صفحه را خط الارض میگویند. فاصله نقطه m از

صفحه افق ارتفاع و از صفحه قائم

بعد نام دارد.



(ش ۱۵)

بالای صفحه افق ارتفاعات مثبت و زیر آن منفی و جلو

صفحه قائم بعدها مثبت و عقب آن منفی میباشند همیشه وقتی

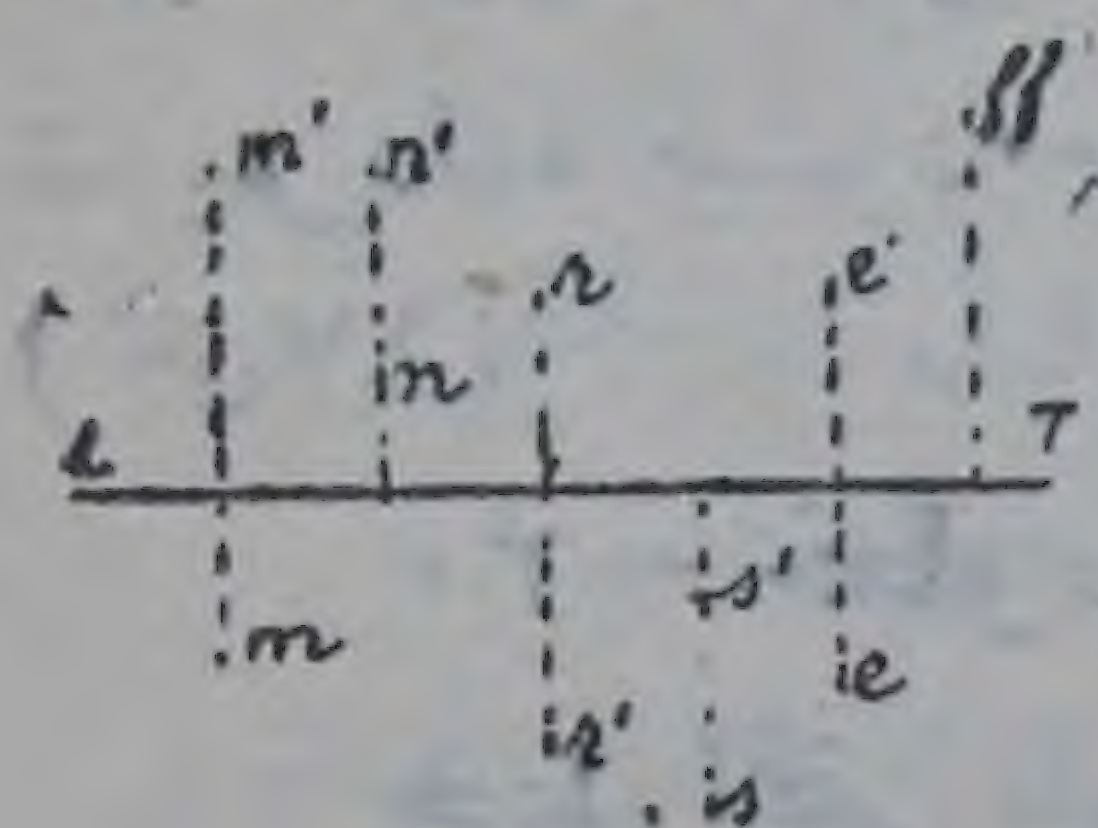
بالای صفحه افق و در روی صفحه قائم بایستیم در روی فصل

مشترک دو صفحه (خط الارض) L را طرف چپ و T را طرف

راست مینویسیم (ش ۱۵) و اگر این ترتیب عوض شود جهت مثبت

بعدها و ارتفاعها تغییر میکند. پس از اینکه نقطه M را بر

H و V تصویر کردیم V را در جهت مثلثاتی ۹۰ درجه دوران میدهم تا بر افق منطبق شود و تصویر قائم نقطه بوضع m' در آید . حال چون LT را روی صفحه کاغذ بکشیم بالای آن جای



ارتفاعهای مثبت و بعدهای منفی و زیر آن جای بعدهای مثبت و ارتفاعهای منفی است .

تصاویر قائم و افقی هر نقطه بر روی يك رابط (خط عمود بر LT) واقعند .

(ش ۱۶)

تصویر افقی را با حرف كوچك لاتینی و تصویر قائم را با همان حرف با علامت (') نمایش میدهند (ش ۱۶) .

۱ - نقطه

۲۸ - صفحات تصویر فضا را بچهار ناحیه تقسیم میکنند در ناحیه اول بعد و ارتفاع مثبت نقطه (mm' ، ش ۱۶) ، در دوم بعد منفی و ارتفاع مثبت (نقطه nn') ، در سوم بعد و ارتفاع منفی (نقطه rr') و در چهارم بعد مثبت و ارتفاع منفی است (نقطه ss') .

نقاط واقع در صفحه منصف فرجه نواحی اول و سوم دارای بعد و ارتفاع مساوی و متحدالعلامه اند یعنی تصاویرشان نسبت به LT قرینه یکدیگرند (ee') ، تصاویر نقاط واقع در صفحه منصف فرجه نواحی دوم و چهارم بر یکدیگر منطبقند، زیرا بعد و ارتفاعشان مساوی و مختلفالعلامه میباشند ff' .

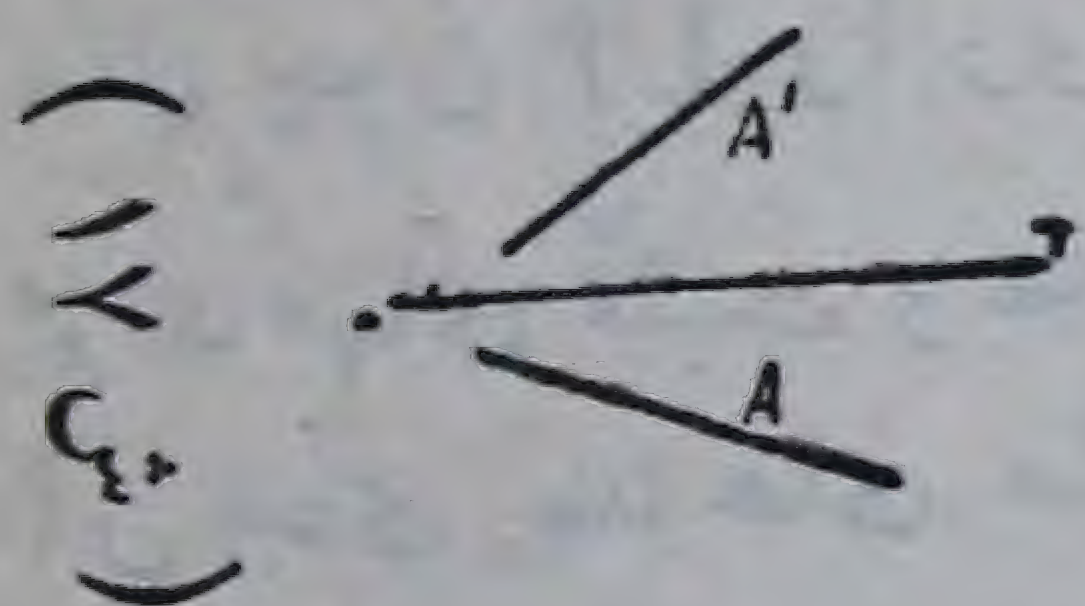
۲ - خط مستقیم

۲۹ - خط مستقیم بوسیله تصاویر قائم و افقی که يك

حرف بزرگ لاتینی خوانده میشوند

نمایش داده میشود. مانند خط AA'

(ش ۱۷)



۳۰ - خطوط مهم عبارتند از :

خط افقی موازی صفحه افق ، تصویر قائم موازی

خط الارض است .

خط جبهی موازی صفحه قائم ، تصویر افقی موازی

خط الارض است .

خط قائم عمود بر صفحه افق ، تصویر افقی يك نقطه

و تصویر قائم عمود است بر خط الارض .

خط منتهی عمود بر صفحه قائم ، تصویر قائم يك نقطه

و تصویر افقی عمود است بر خط الارض .

خط نیمرخ عمود بر خط الارض ، تصاویرش بر امتداد

یکدیگر عمود بر خط الارضند .

خط مواجه موازی خط الارض ، تصاویرش هم موازی

خط الارضند .

هر خط بوسیله تصاویرش مشخص میشود مگر نیمرخ

که باید اقل دو نقطه آن مشخص باشد .

برای حل مسائل مربوط به خط نیمرخ باید آنرا تسطیح

کرد (رجوع شود بشماره ۶)

۳۱ - نقاط مهم خط عبارتند از :

اثر افقی که برای بدست آوردنش تصویر قائم خط را امتداد میدهیم تا خط الارض را قطع کند.
اثر قائم از برخورد تصویر افقی با خط الارض مشخص میشود.

نقطه تلاقی خط و منصف فرجه اول از تلاقی قرینه یکی از تصاویر خط با تصویر دیگر مشخص میشود.
نقطه تلاقی با منصف فرجه دوم از تلاقی تصاویر خط مشخص میشود.

۳۲- توازی دو خط - تصاویر همنامشان متوازییند.
۳۳- تقاطع دو خط - تصاویر همنامشان متقاطعند و دو نقطه تقاطع بر یک رابط واقعند.

برای تحقیق اینکه دو خط که تصاویرشان در خارج حدود شکل متقاطعند یکدیگر را قطع میکنند یا نه دو نقطه یکی را بدو نقطه دیگری وصل میکنیم، اگر دو خط که باین طریق بدست میآیند متقاطع یا متوازی باشند دو خط مفروض هم متقاطعند.
۳۴- توازی دو نیمرخ نیز بنحوفوق تحقیق میشود.

۳- صفحه

۳۵- صفحه مانند هندسه، با دو خط متقاطع یا متوازی یا سه نقطه غیر واقع بر یک استقامت یا یک خط و نقطه مشخص میشود.

۳۶- خطوط مهم صفحه عبارتند از:

اثر افقی، که تصویر قائمش بر روی خط الارض است.
اثر قائم، « افقیش » « »

این دواثر یا با هم موازییند یا یکدیگر را در روی xy

قطع میکنند .

نمایش صفحه بوسیله آثار بهترین طریق نمایش آنست .
افقیه‌ها که تصاویر افقیشان موازی اثر افقی است .
جبهیه‌ها « قائمشان » « قائم است .

خط بزرگترین شیب نسبت بصفحه افق که تصویر
 افقیش عمودست بر اثر افقی .
خط بزرگترین شیب نسبت بصفحه قائم که تصویر
 قائمش عمودست بر اثر قائم .

۳۷ - صفحات مهم عبارتند از :

صفحه افقی ، اثر افقی ندارد ، اثر قائمش موازی
 خط الارض است .

صفحه جبهی ، اثر قائم ندارد ، اثر افقی موازی
 خط الارض است .

صفحه قائم ، اثر قائمش عمود بر خط الارض (تصاویر
 افقی جمیع خطوط و نقاطش بر اثر افقی آن واقع میشوند)
صفحه منتصب ، اثر افقی عمود بر خط الارض (تصاویر
 قائم جمیع خطوط و نقاطش بر اثر قائم آن واقع میشوند)

صفحه نیمرخ ، آثارش بر یک امتداد و عمودند بر
 خط الارض

صفحه مواجه ، موازی خط الارض و آثارش هم با آن
 موازی هستند

مسائل مربوط بصفحه نیمرخ بوسیله تسطیح صفحه حل
 میشوند .

۳۸- توازی خط و صفحه - خط وقتی با صفحه موازی است که با یکی از خطوط آن موازی باشد.

۳۹- خط عمود بر صفحه - تصویر افقی و تصویر قائم بر اثر قاش بر صفحه.

۴۰- فصل مشترك دو صفحه

فصل مشترك دو صفحه را بوسیله رسم دو صفحه کمکی بدست میآورند بدین طریق که با هر صفحه کمکی يك نقطه از فصل مشترك را تعیین میکنند، صفحات کمکی بیشتر عبارتند از صفحات تصویر، صفحات قائم یا منتصب و افقی یا جبهی.

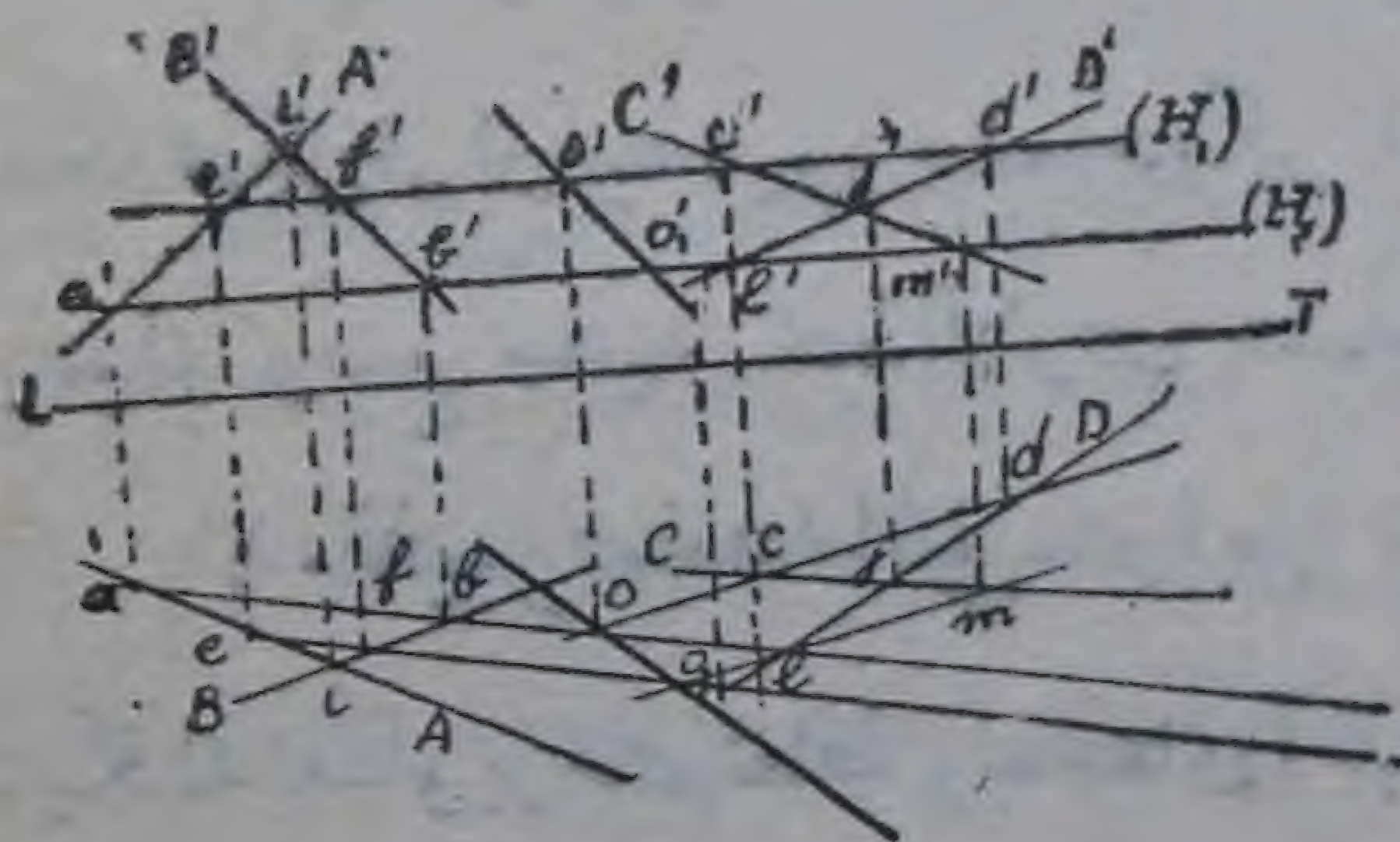
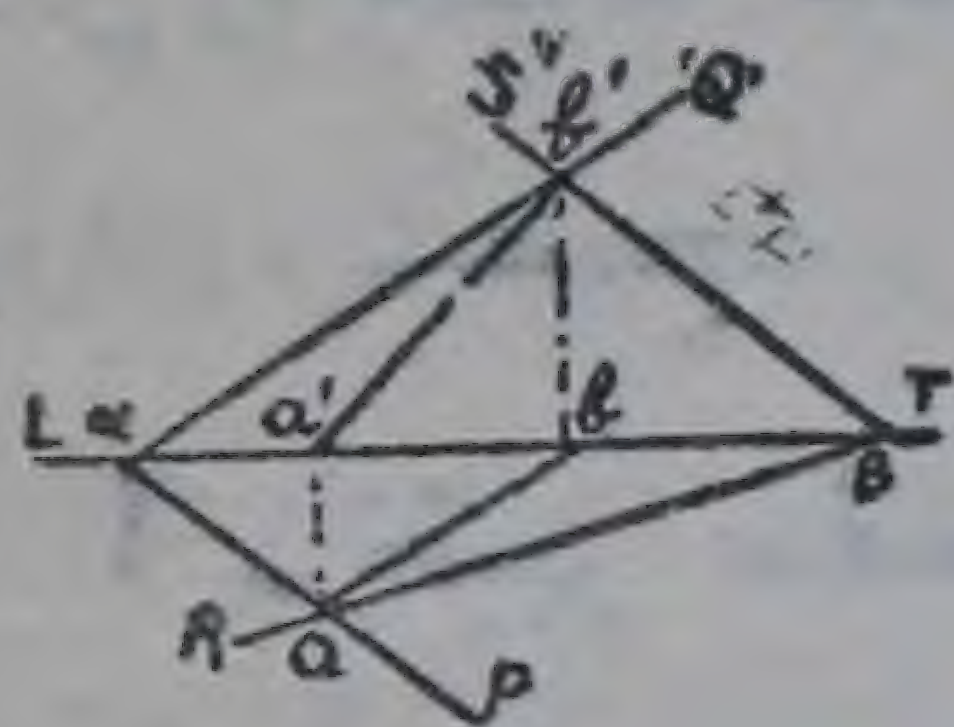
مثلاً: فصل مشترك دو صفحه که با آثارشان نموده شده باشند (ش ۱۸) بکمک صفحات تصویر - فصل مشترك دو صفحه که هر يك بدو خط متقاطع نموده شده باشند (ش ۱۹)

بکمک دو صفحه افقی - فصل مشترك دو صفحه مواجه (ش ۲۰) کمک يك صفحه قائم.

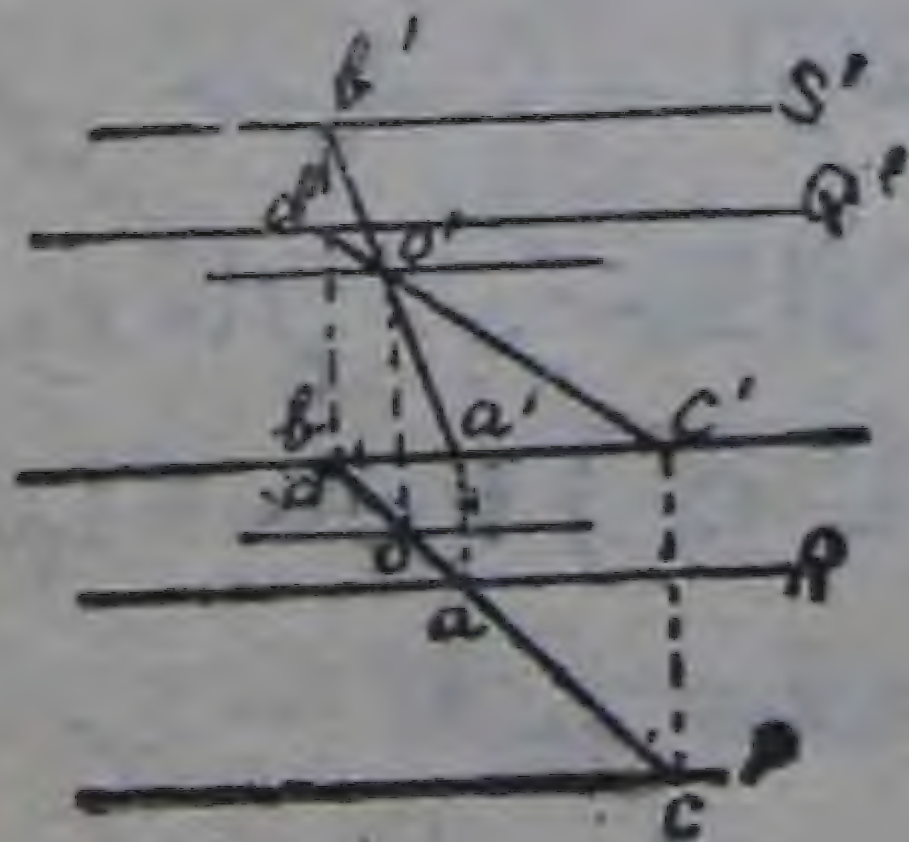
۴۱- فصل مشترك

خط و صفحه

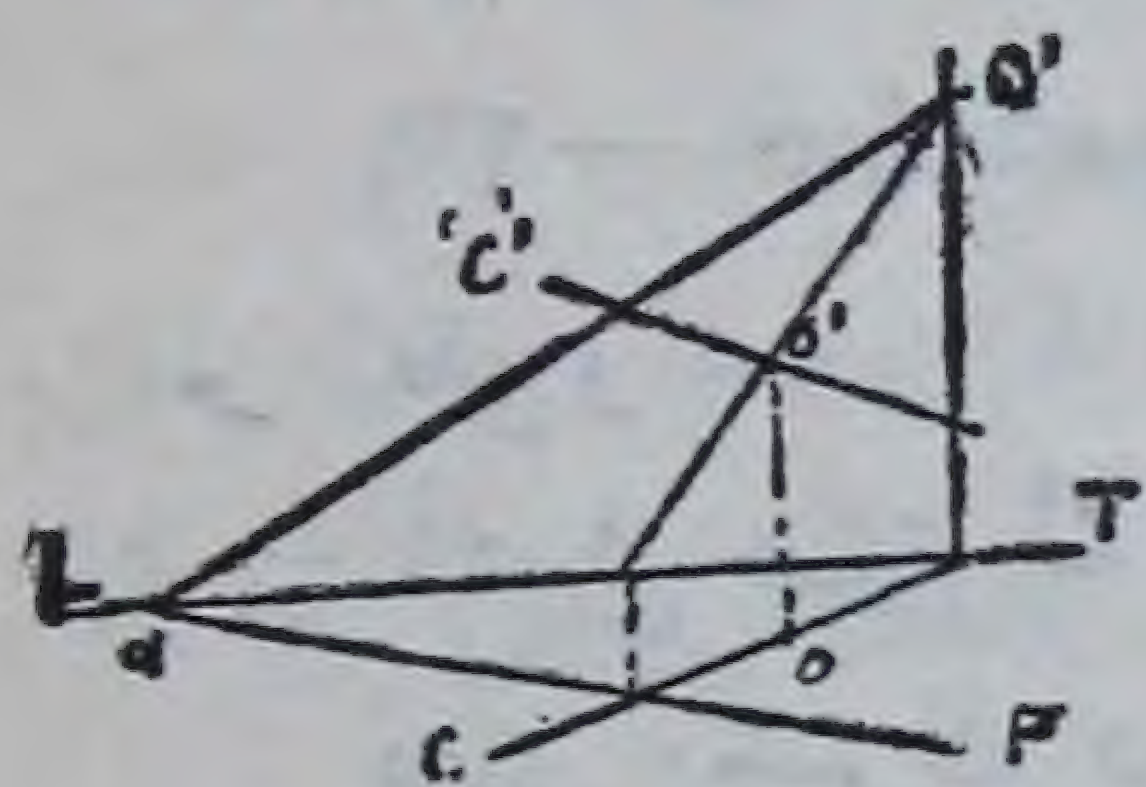
بر خط يك صفحه فرعی مرور میدهم (معمولاً قائم یا منتصب)، فصل مشترك دو صفحه خط مفروض را در نقطه OO' قطع میکند (ش ۲۱)، این نقطه فصل مشترك خط و صفحه است.



(ش ۱۹)



۴ = تغییر مکانها



۴۲ - مقصود از تغییر مکان دادن يك

شكل مستوی اینست كه آنرا با يك صفحه تصوير (یا يك صفحه تصوير

موازی آن) قرار دهیم تا تصویر جدید

شكل با خود آن مساوی شود و بتوانیم از روی آن خواص و ابعاد و زوایای

(ش ۲۱)

شكل را مطالعه كنیم . تغییر مکانها بر سه قسمند : تغییر صفحه،

دوران ، تسطیح.

۱ - تغییر صفحه

۴۳ - در تغییر صفحه صفحه افقی یا قائم تصویر را موازی

صفحه شكل قرار میدهیم و صفحه دیگر ثابت میماند . هر تغییر صفحه

بوسیله وضع جدید خط الارض مشخص میشود .

۱ - تغییر صفحه افق - در این تغییر چون صفحه قائم تغییر

نمیکند تصاویر قائم نقاط و بعدهای آنها ثابت میمانند و فقط تصاویر

افقی و ارتفاعات تغییر میکنند . پس برای بدست آوردن تصاویر

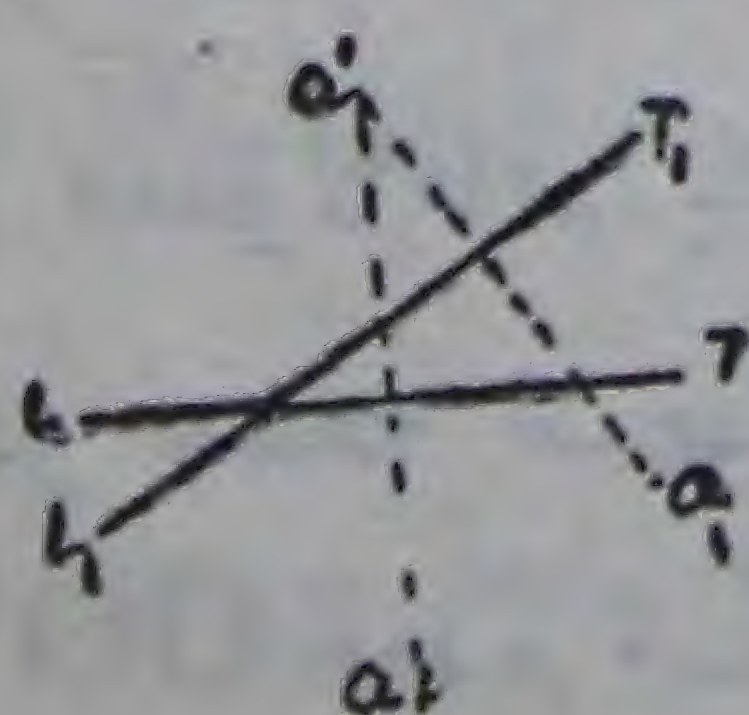
افقی جدید باید از تصاویر قائم (كه ثابتند)

عمودهایی بر خط الارض جدید كشید و بر

آنها ابعاد را (كه ثابتند) جدا نمود (ش ۲۲)

ب - تغییر صفحه قائم - در این تغییر

صفحه تصاویر افقی و ارتفاعات ثابت میمانند

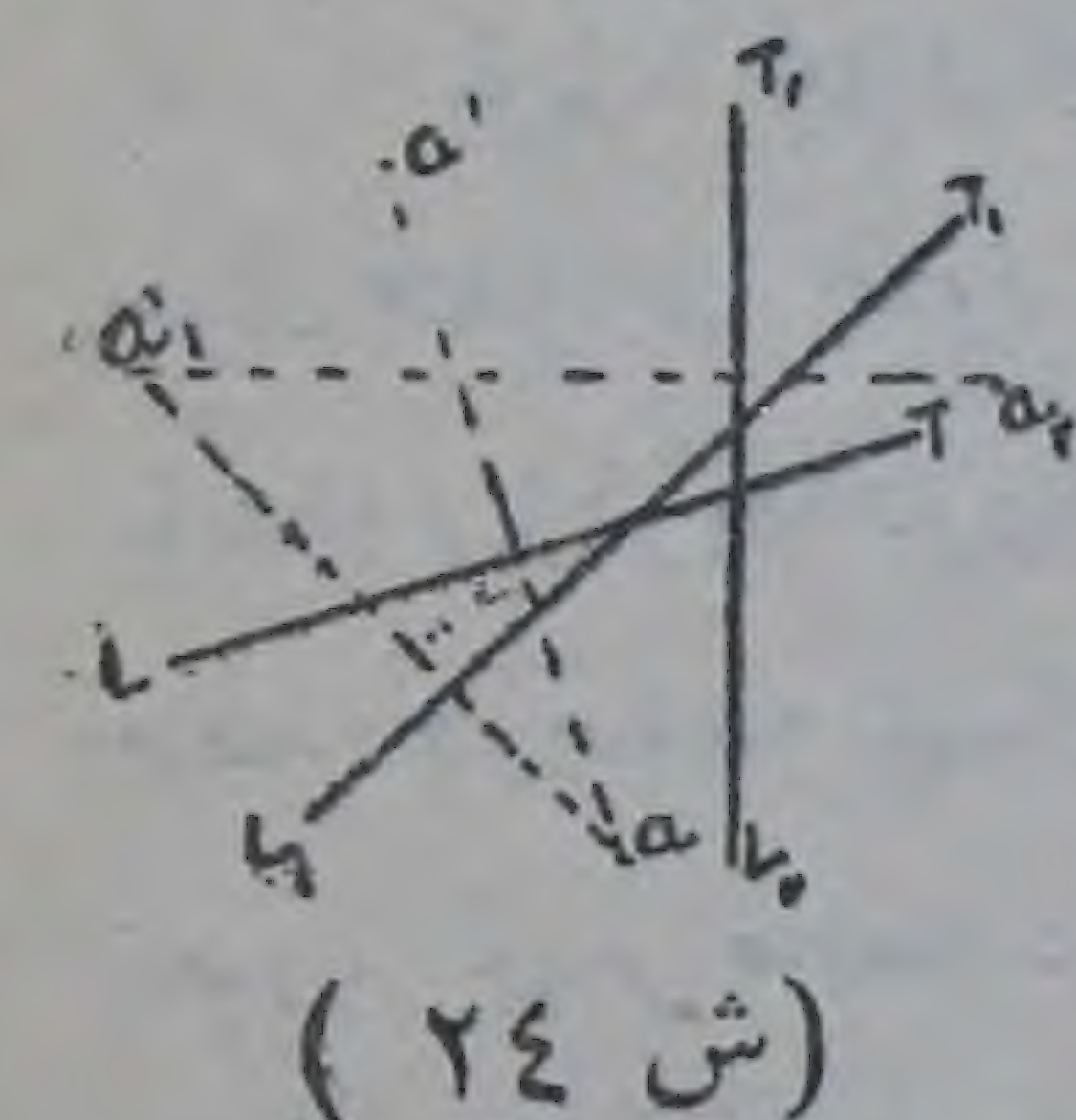


« ش ۲۲ »

و تصاویر قائم و ارتفاعات تغییر میکنند (ش ۲۳) **پ - تغییر صفحه مضاعف -** یعنی اول یکی از صفحات تصویر و بعد صفحه دیگر را تغییر داد. این عمل ترکیب دو عمل سابق است. مثلاً در شکل ۲۴ نخست

صفحه افق و بعد صفحه قائم را تغییر میدهیم.

توجه کنید! - در مومع تغییر صفحه باید متوجه علامت



بعدها و ارتفاعات و وضع خط الارض جدید بود یعنی اگر L طرف چپ خط الارض قرار داده شود بعد های مثبت زیر و ارتفاعات مثبت بالای آن واقع میشوند، و اگر L را طرف راست بگذاریم عکس این ترتیب خواهد شد.

۴۴ - صفحه افق (یا قائم) را موازی خطی باید

قرار داد - خط افقی (یا جبهی) میشود، پس خط الارض جدید باید موازی تصویر قائم (یا افقی) خط مفروض قرار داده شود.

۴۵ - صفحه افق (یا قائم) را عمود بر صفحه ای باید

قرار داد - صفحه قائم (یا منتصب) میشود، پس خط الارض جدید باید عمود بر اثر قائم (یا افقی) صفحه اختیار شود.

۴۶ - خطی را عمود بر صفحه افقی (یا قائم) باید

قرار داد - نخست باید خط را موازی صفحه قائم (یا افق) کرد بعد آن را عمود بر صفحه افق (یا قائم) نمود (تغییر صفحه مضاعف).

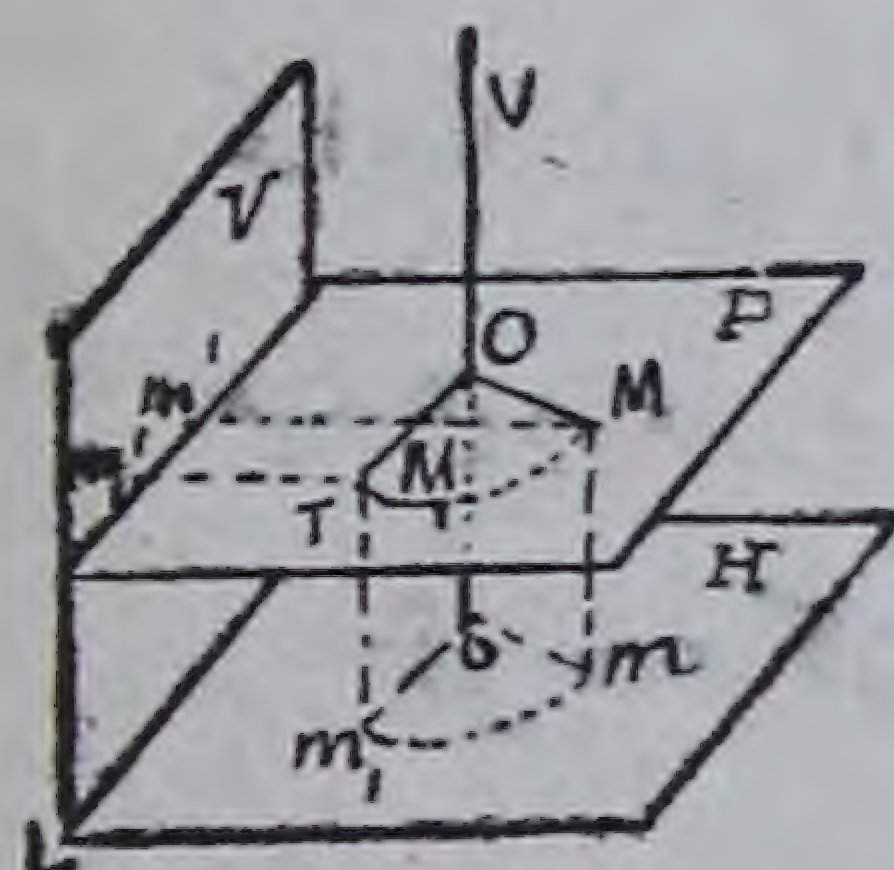
۴۷ - صفحه‌ای را عمود بر صفحه افق (یا قائم) باید

قرار داد - نخست باید صفحه را عمود بر صفحه قائم

(یا افق) کرد بعد موازی صفحه افق (یا قائم) نمود (تغییر صفحه مضاعف).

ب - دوران

۴۸ - دوران نقطه - هر گاه نقطه‌ای



حول محوری عمود بر يك صفحه (مثلاً افق)

باندازه زاویه α دوران کند تصویر آن بر آن

صفحه در صفحه بهمان اندازه دوران میکند و

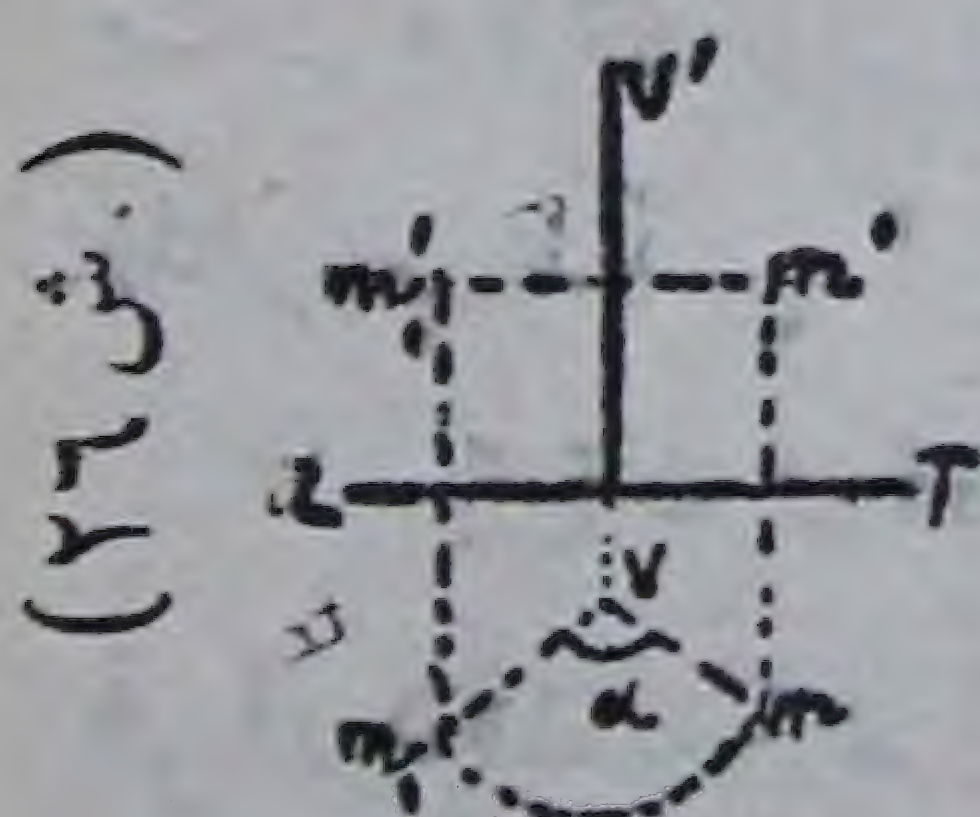
تصویرش بر صفحه دیگر (قائم) در روی خطی

موازی خط الارض تغییر مکان میدهد (ش ۲۵).

پس در دوران نقطه حول محور قائم تصویر افقی

بمقدار حقیقی دوران میکند و تصویر قائم در روی خطی موازی

LT حرکت مینماید (ش ۲۶) و در



دوران حول محور متعصب تصویر

قائم بمقدار حقیقی دوران نموده تصویر

افقی موازی خط الارض تغییر مکان میدهد.

۳۹ - دوران خط - البته برای دوران خط کافیست دو

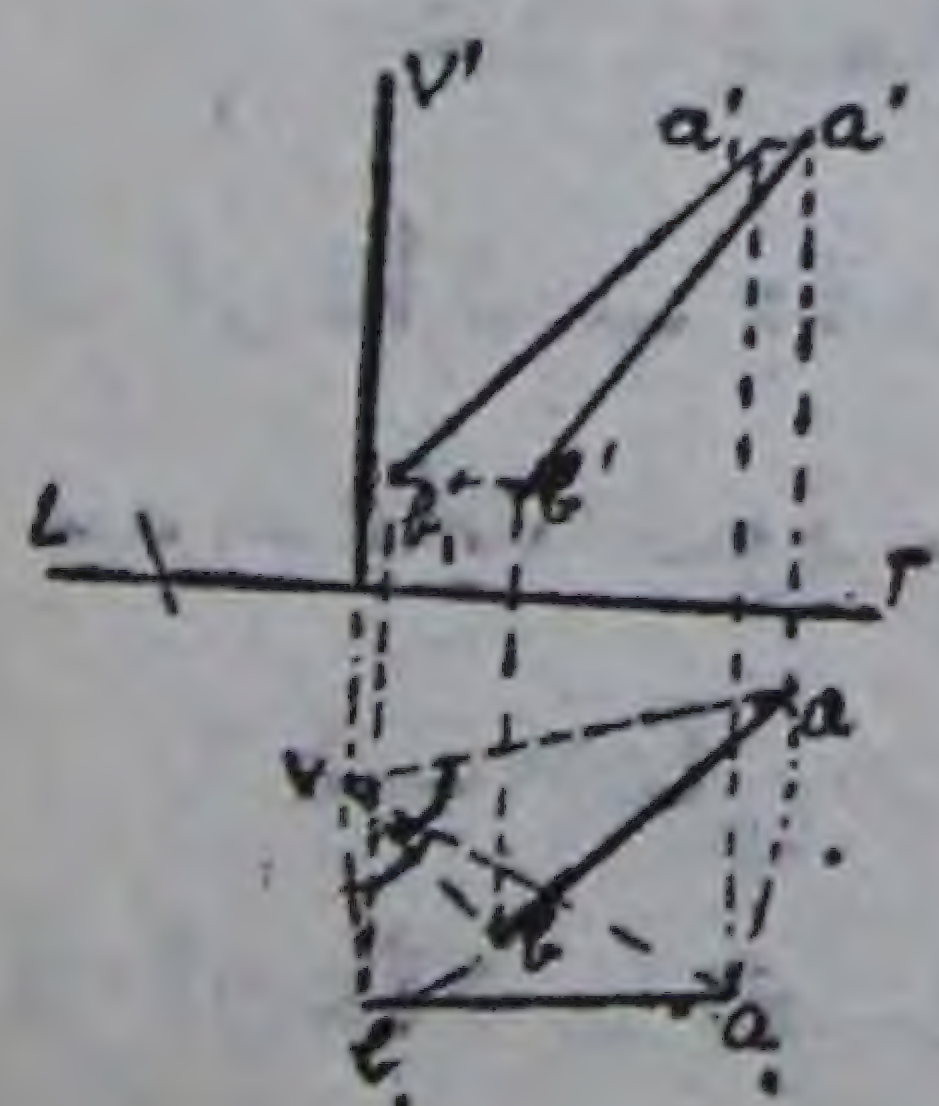
نقطه آنها را دوران داد (ش ۲۷).

a, b با ab مساویست.

و دیگر اینست که عمود مشترک

محور و خط را رسم کنیم و موقع آن

آنها باندازه زاویه مطلوب دوران

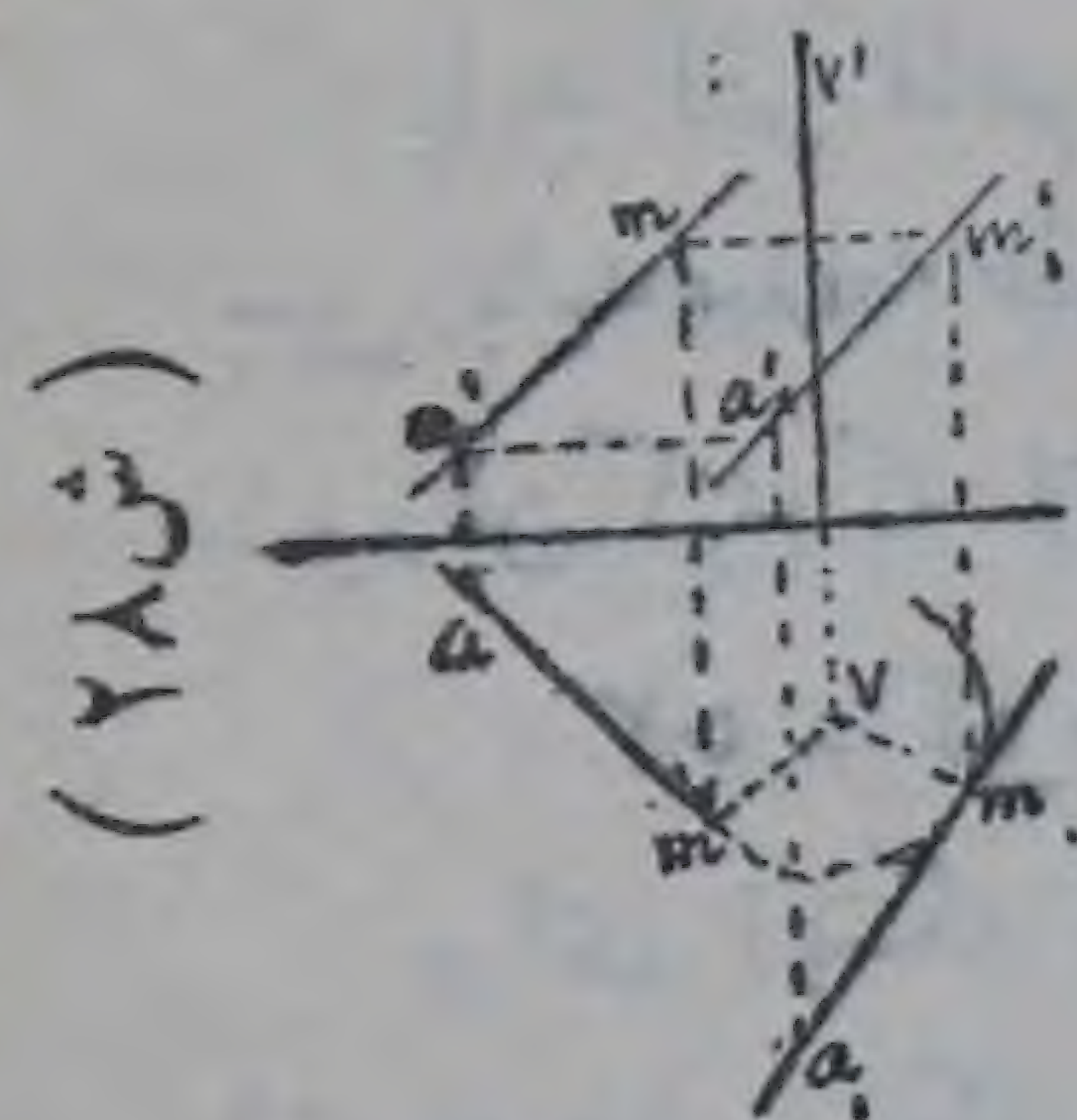


(ش ۲۷)

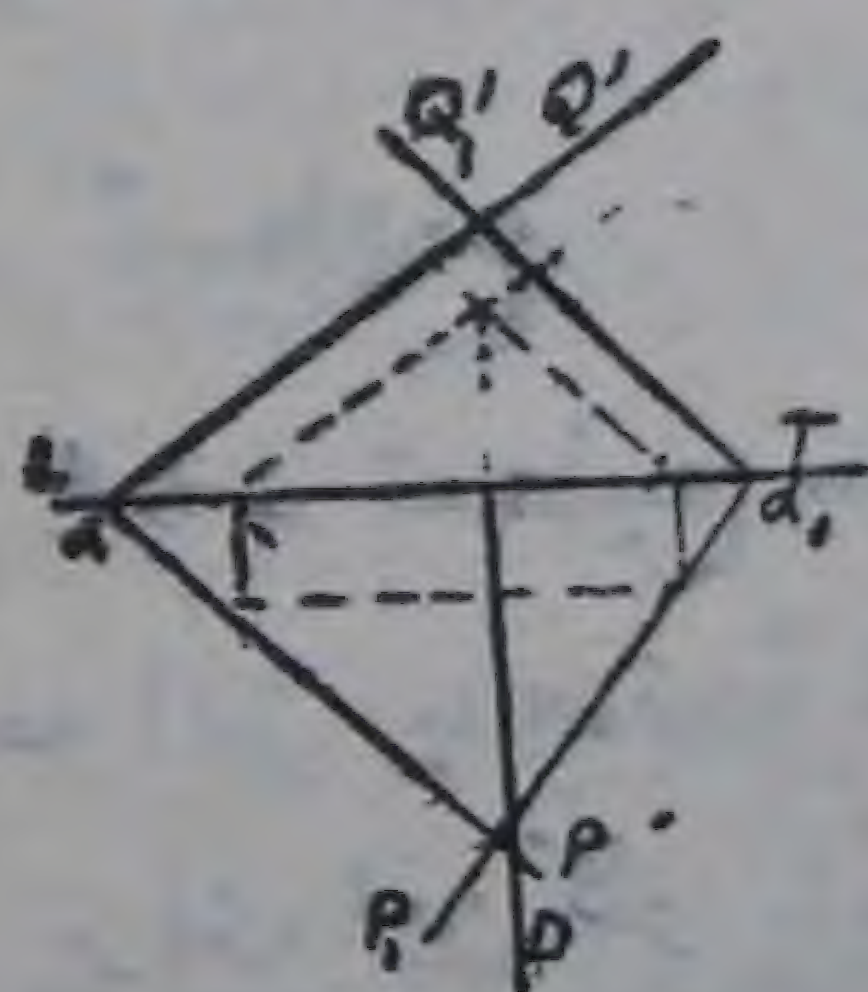
دهیم و وضع جدید خط را بوسیله رسم عمود بر وضع جدید عمود
مشترك مشخص کنیم. آنگاه تصویر قائم را بوسیله تعیین
اوضاع جدید تصاویر نقطه دیگر معین نمائیم (ش ۲۸)

۵۰ - دوران صفحه - باید

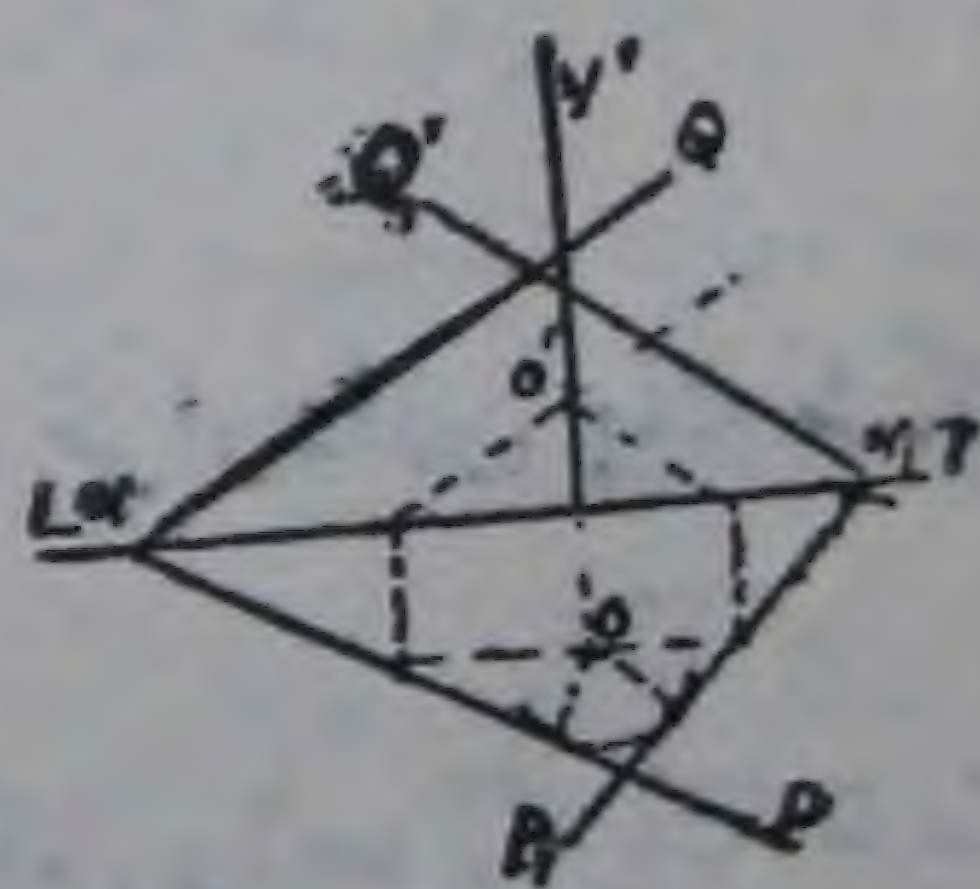
يك نقطه و يك خط از صفحه را دوران
داد. ولی معمولا نقطه تلاقی محور با
صفحه را که حین دوران ثابت میماند
در نظر گرفته يك خط از صفحه را
(معمولا اثر قائم را اگر محور قائم
باشد و اثر قائم را اگر محور منتصب



باشد) باندازه زاویه مطلوب دوران میدهیم. اگر یکی از
آثار را دوران دهیم برای تعیین اثر جدید دیگر از امتداد
جبهه یا افقیه ای که بر محل تلاقی محور و صفحه میگذرد استفاده
میکنیم (ش ۲۹ و ۳۰)



(ش ۳۰)

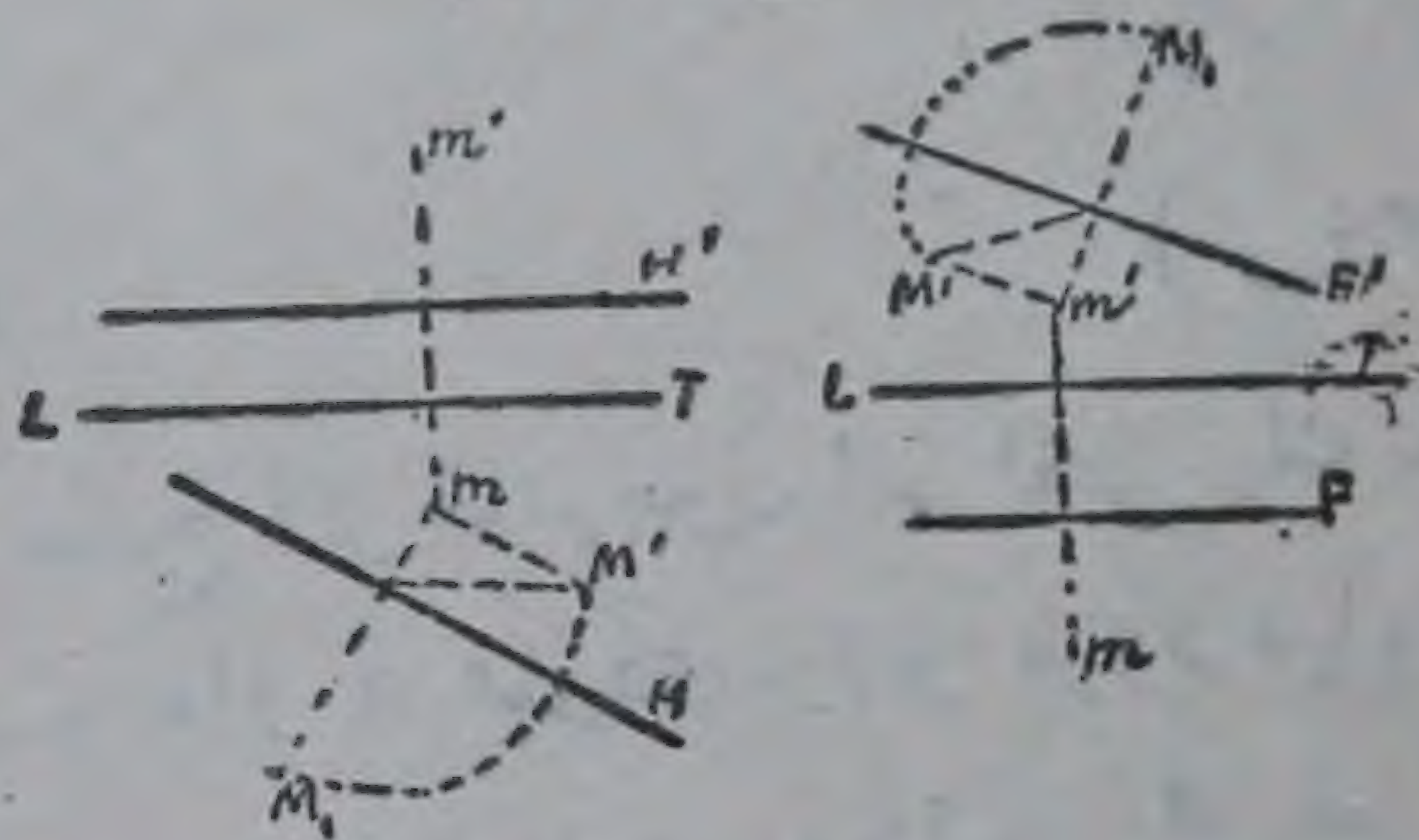


(ش ۲۹)

۵۱ - خطی را دوران دهید تا جبهه شود

باید تصویر افقی خط موازی خط الارض گردد. پس

ارتفاع (یا بعد) نقطه ولولا باشد (رجوع شود بشماره ۲۳) پس برای تسطیح يك نقطه حول يك افقیه (جبهیه) از تصویر افقی (قائم) نقطه خطی موازی ولولا رسم و بر روی آن باندازه اختلاف ارتفاع (بعد) نقطه ولولا جدا میکنیم و نیز از تصویر نقطه عمودی بر ولولا فرود میآوریم و بر امتداد آن طولی مساوی وتر سه بر قائمیکه بر روی دو خط مرسوم ساخته شده باشد جدا میمائیم (ش ۳۳) (قاعده سه بر قائم). نقاط دیگر را بكمك آن نقطه تسطیح میکنیم.



(ش ۳۳)

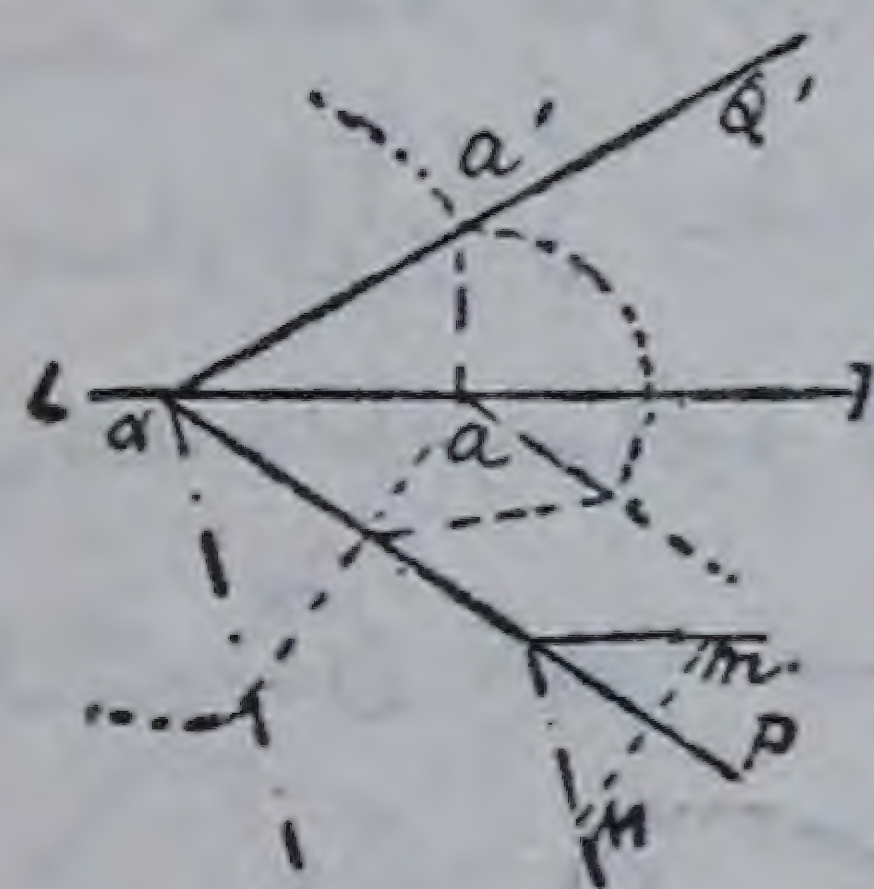
باید متوجه بود که نقاطی را میتوان بكمك تسطیح نقطه A حول يك افقیه یا جبهیه تسطیح کرد که با آن نقطه ولولا در يك صفحه باشند.

۵۵ - ترفیع عکس عمل تسطیح است.

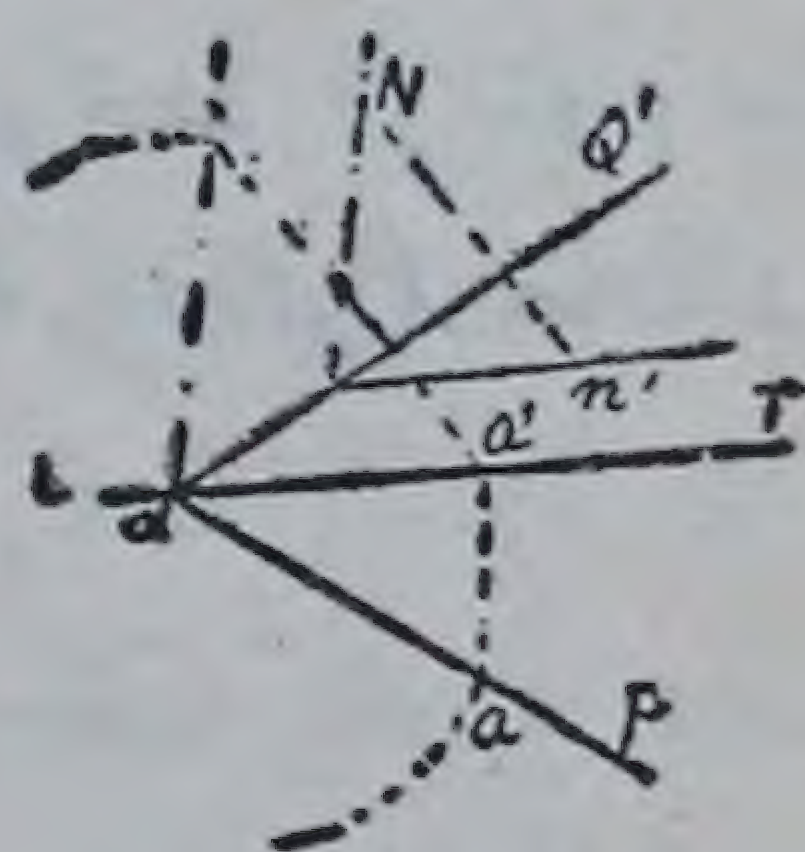
۵۶ - تسطیح خط - کافیست دو نقطه آنرا تسطیح کرد و بكمك آنها خط را تسطیح نمود. هر خط موازی ولولا باشد تسطیحش هم با ولولا موازیست. تسطیحات خط موازی متوازیند.

۵۷ - تسطیح صفحه - معمولا صفحه را حول اثر افقی یا

قائم آن تسطیح میکنند و برای اینکار تسطیح اثر قائم را حول اثر افقی (ش ۳۴) یا تسطیح اثر افقی را حول اثر قائم (ش ۳۵) بدست آورده سایر نقاط مانند mm' را بمدد آن تسطیح مینمائیم.



(ش ۳۴)



(ش ۳۵)

برای تسطیح اثر قائم حول اثر افقی يك نقطه، امانند aa' را اختیار نموده از a عمودی بر اثر فرود میآوریم و بمرکز α و شعاع αa قوسی میزنیم تا عمود را در A قطع کند. αA تسطیح اثر قائم است.

۵۸ - قرار داد - تسطیح خط را همیشه با خط نقطه

نمایش میدهند.

۵۹ - تسطیح صفحه قائم یا منتصب - برای تسطیح

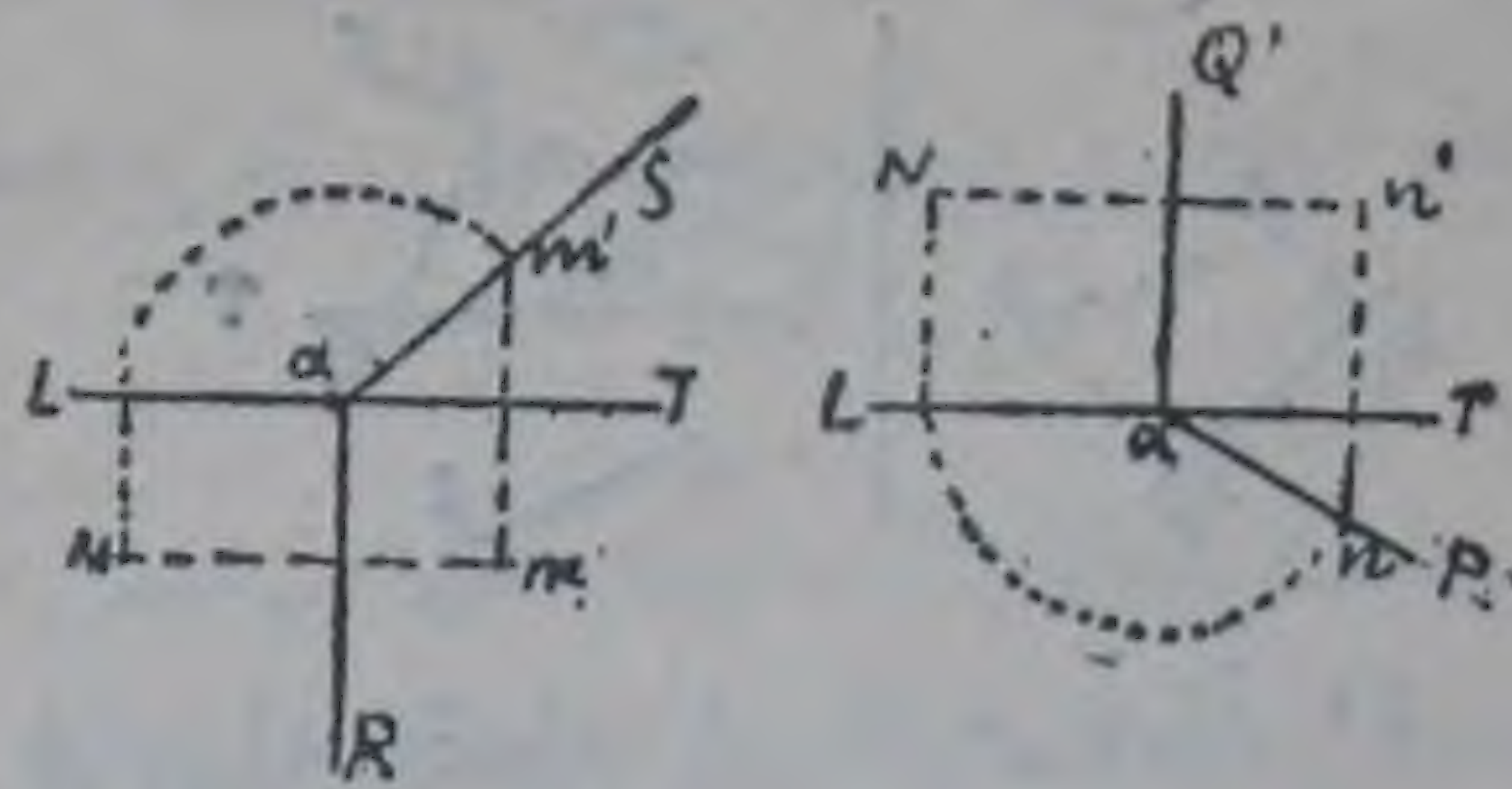
nm' از صفحه قائم (یا mm' از صفحه منتصب) (ش ۳۶) از m یا n

عمودی بر لولا فرود میآوریم و بمرکز α و شعاع $\alpha m'$ یا αn قوسی

میزنیم تا خط الارض را در K قطع کند از K عمودی بر YX

اخراج مینمائیم تا عمودی را که بر لولا وارد آمده است در

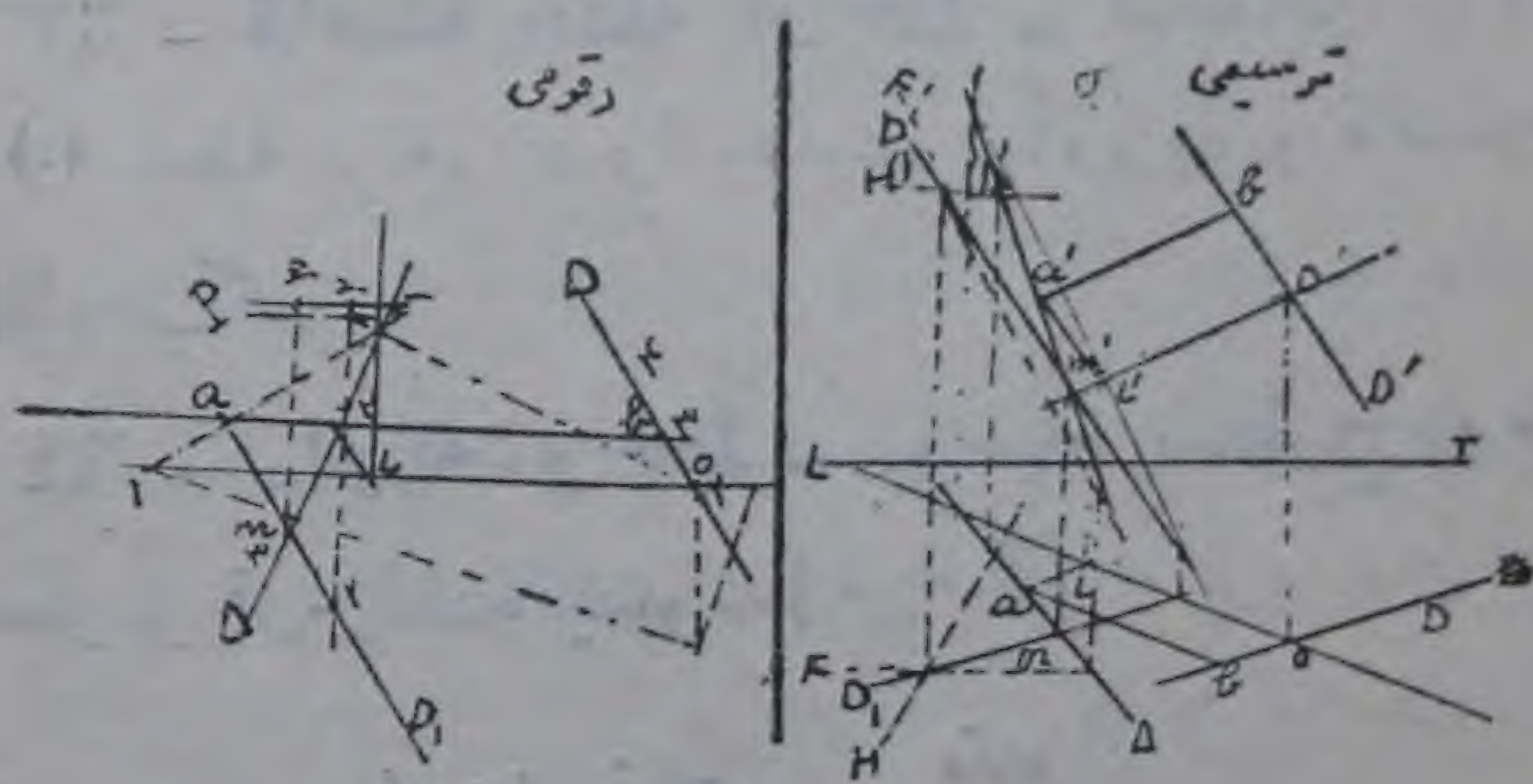
N یا M قطع کند. N یا M نقطه مفروض است.



(ش ۳۶)

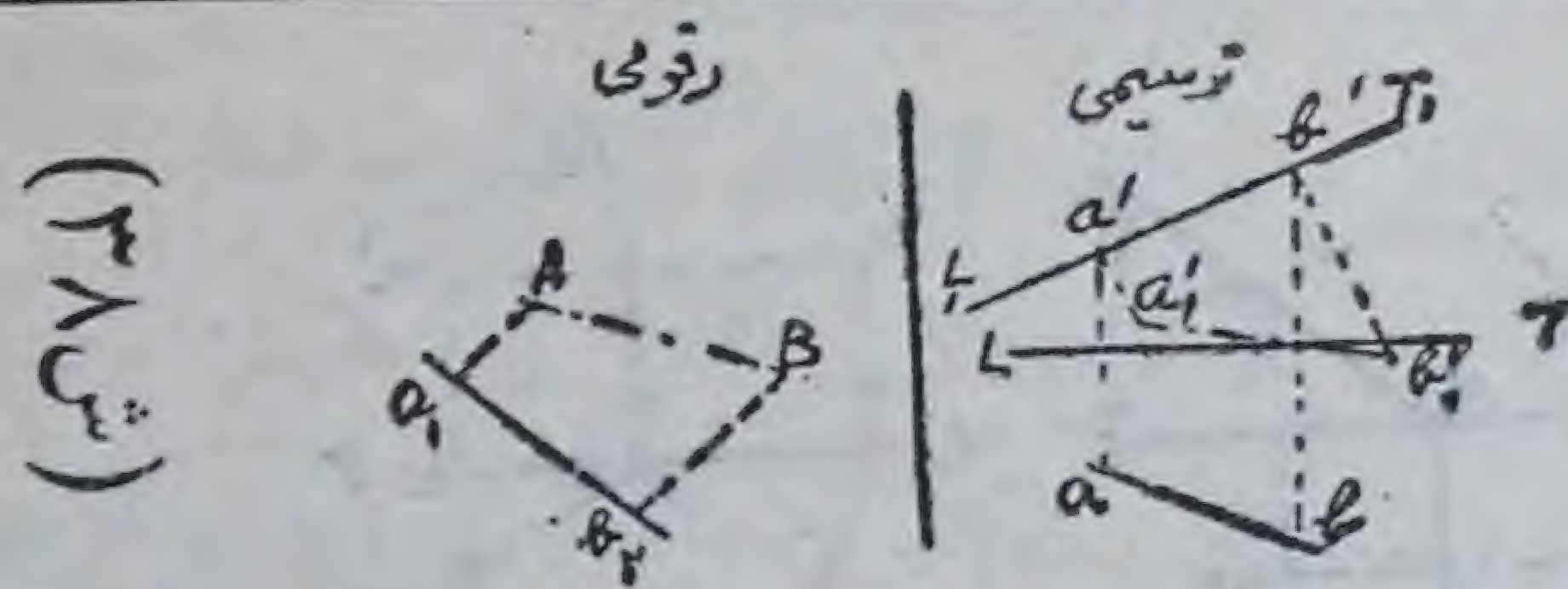
۳۔ موارد استعمال

۶۰- عمود مشترك دو خط - برای رسم عمود مشترك دو خط Δ و Δ' بر Δ صفحه ای موازی Δ' میگذرانیم و از يك نقطه M از Δ' عمودی بر آن صفحه فرود میآوریم تا آنرا در A قطع کند، از A خطی موازی Δ' میکشیم تا Δ را در B قطع نماید خط BC که موازی MA رسم شود جواب مسئله است.

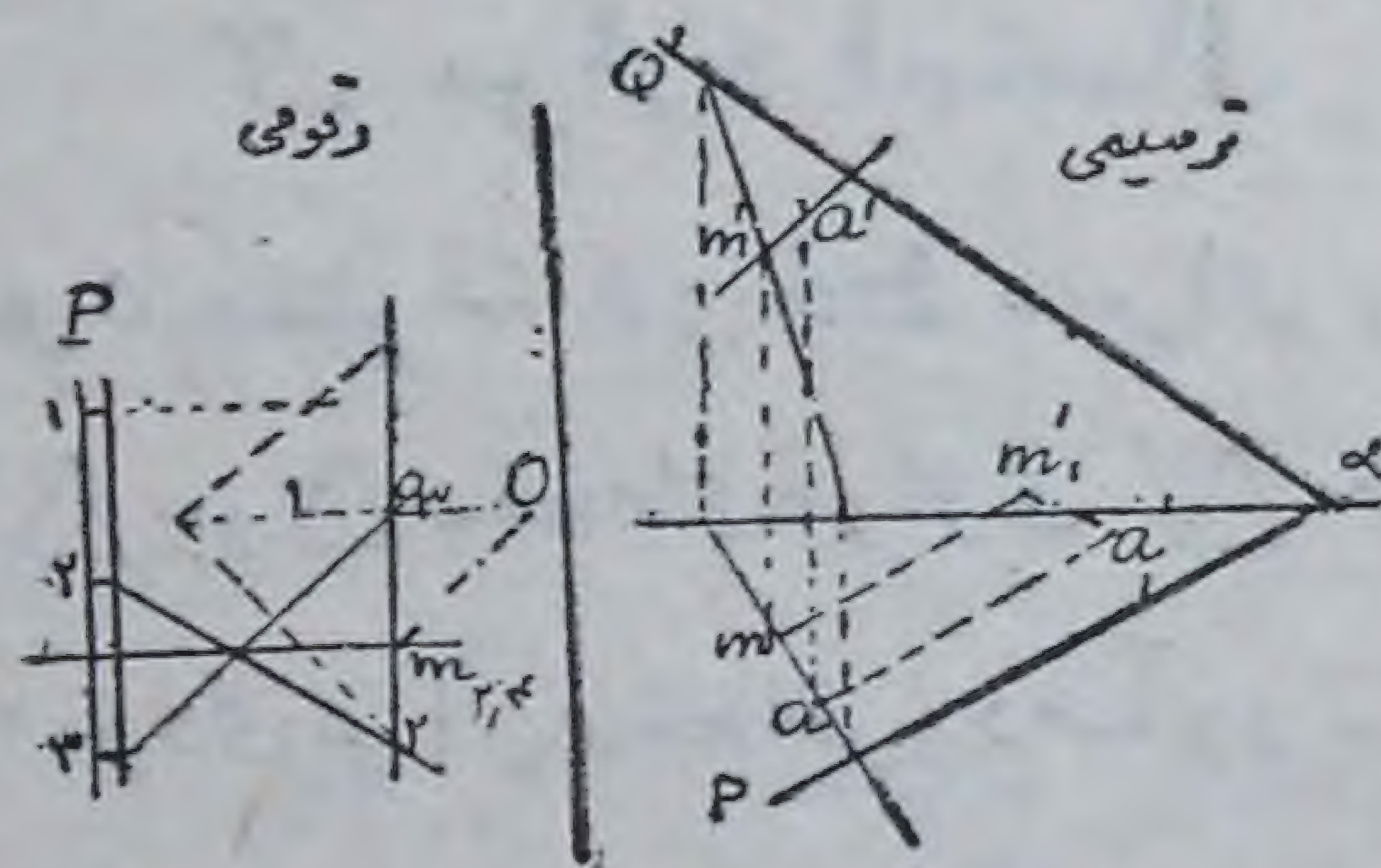


(ش ۳۷)

۶۱- فاصله دو نقطه A و B - در ترسیم بکمال
تغییر صفحه یا دوران و در رقوم بوسیله تسطیح خط واصل
بین دو نقطه معلوم میشود (ش ۳۸)



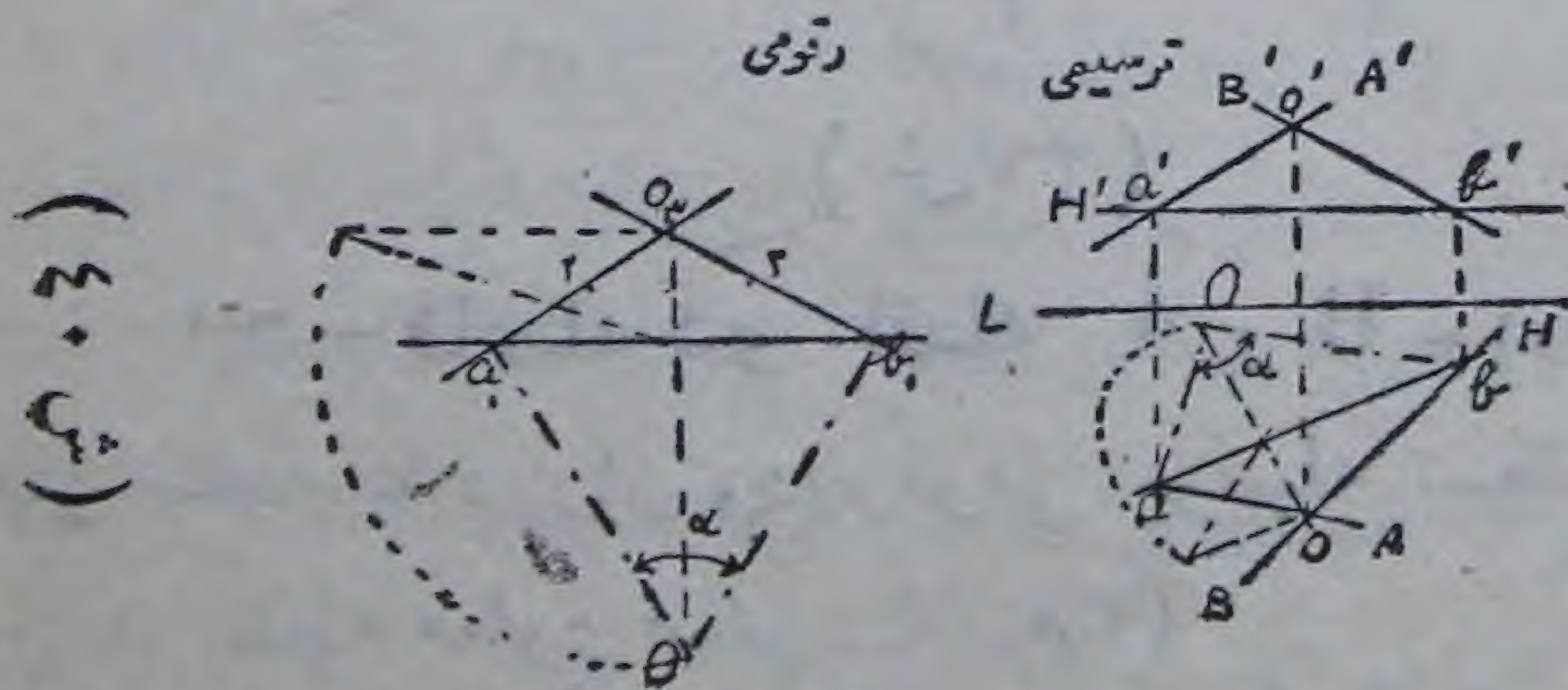
۶۲ - فاصله نقطه A از صفحه P - عمود AO را که موقع آن در صفحه O است بر P وارد آورده فاصله نقاط A و P را معین میکنیم (ش ۳۹)



(ش ۳۹)

۶۳ - فاصله نقطه از خط - صفحه ای بر خط عمود کرده O نقطه برخورد را بدست میآوریم و فاصله M از O را اندازه میگیریم.

۶۴ - زاویه دو خط - بوسیله تسطیح دو خط موازی صفحه تصویر قرار داده میشوند (ش ۴۰)

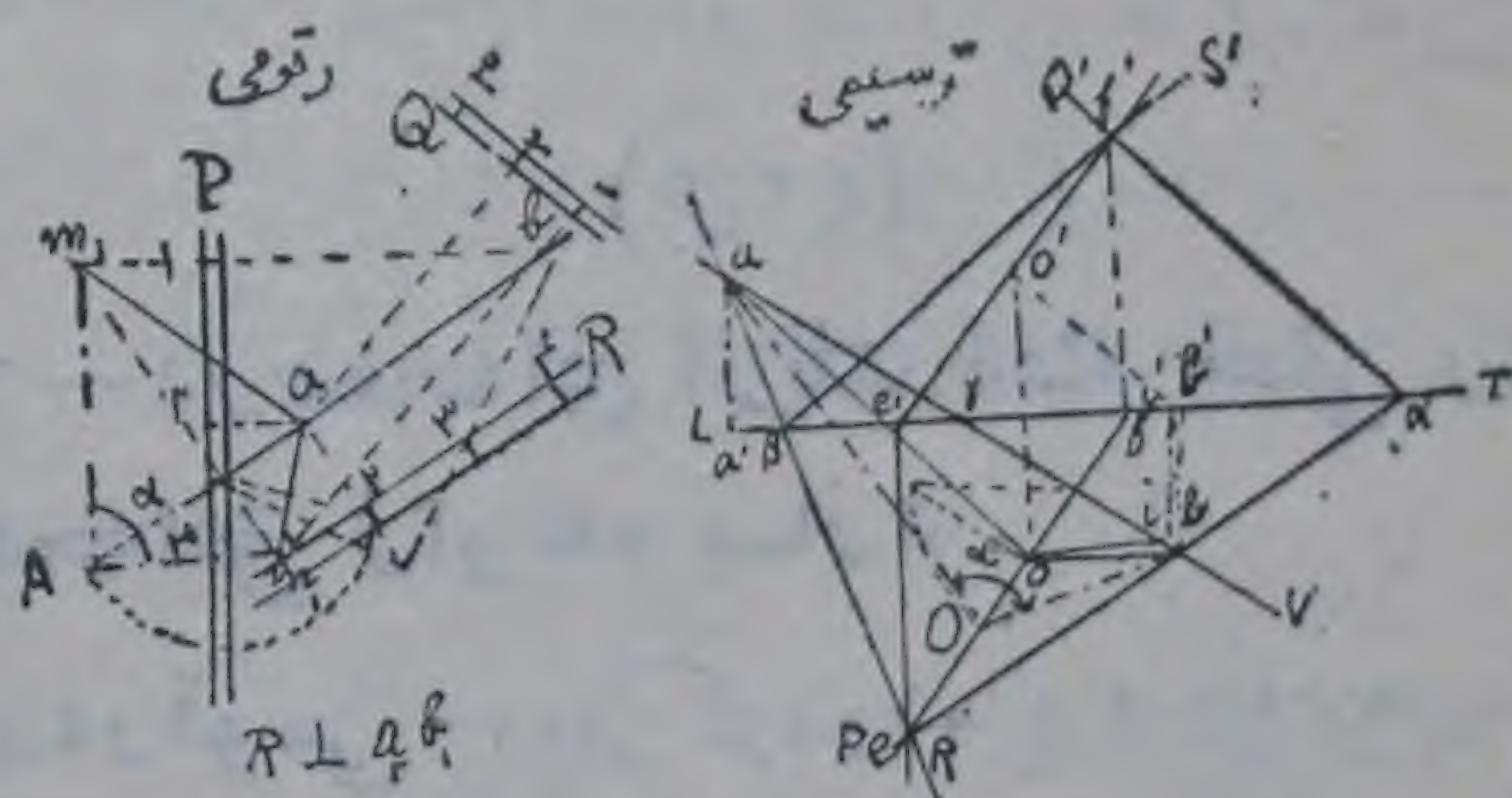


۶۵- زاویه خط و صفحه - یعنی زاویه خط با تصویرش

بر صفحه .

۶۶- زاویه دو صفحه - صفحه ای بر فصل مشترك آنها

عمود نموده فصل مشترك آنرا با هريك از آن دو پیدا میکنیم
(ش ۴۱)، زاویه بین دو فصل مشترك زاویه بین دو صفحه است



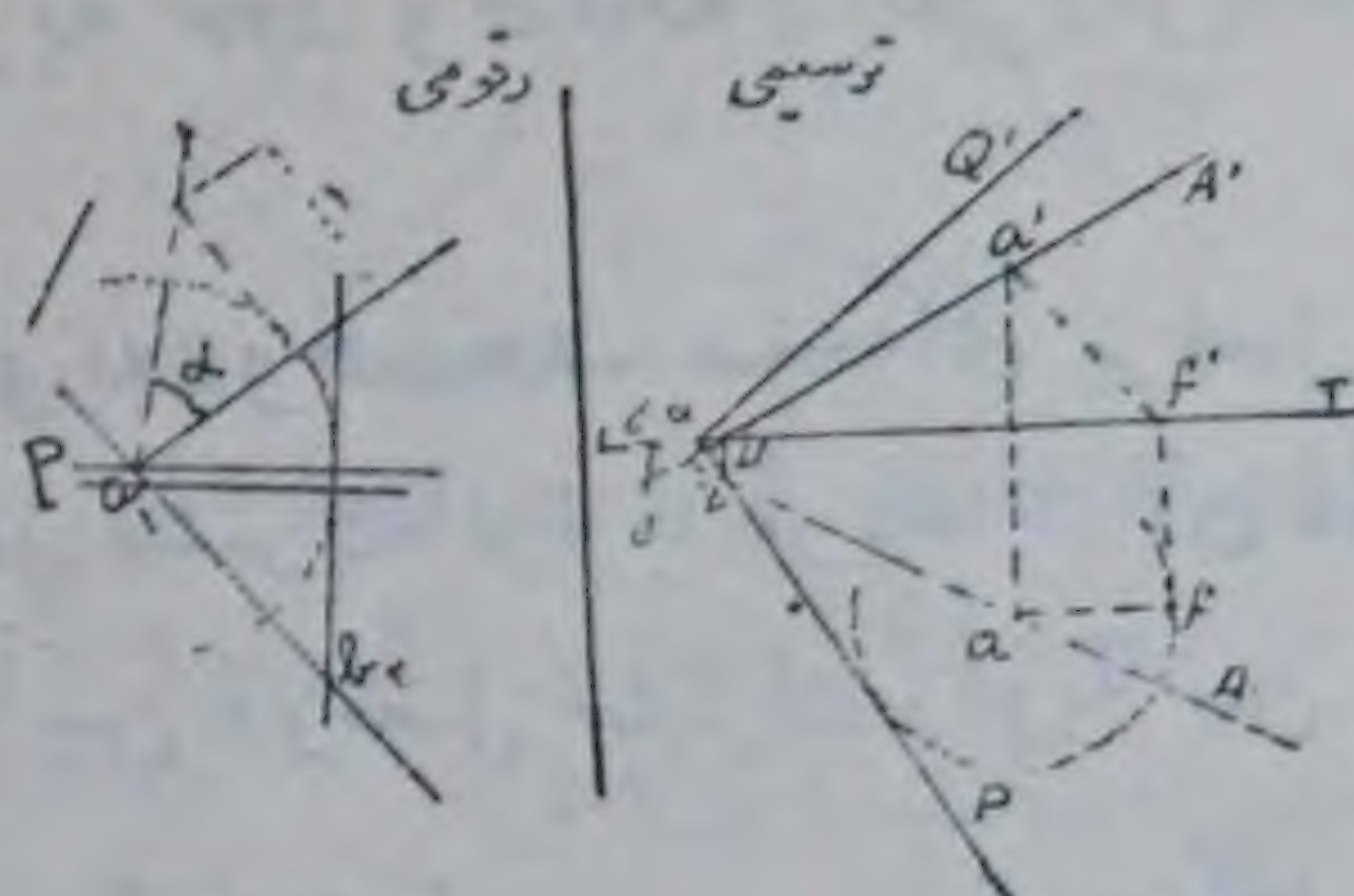
(ش ۴۱)

۶۷- بر خطی صفحه ای بگذرانید که با صفحه

افق زاویه α تشکیل دهد .

هندسه رقومی : بمرکز a_1 و شعاع برابر $\cot \alpha$ دایره ای
میزنیم و از b_2 مماسی بر آن دایره رسم میکنیم، شعاعی از دایره
که بر این مماس عمود شود مقیاس شیب صفحه مطلوبست (ش ۴۲)

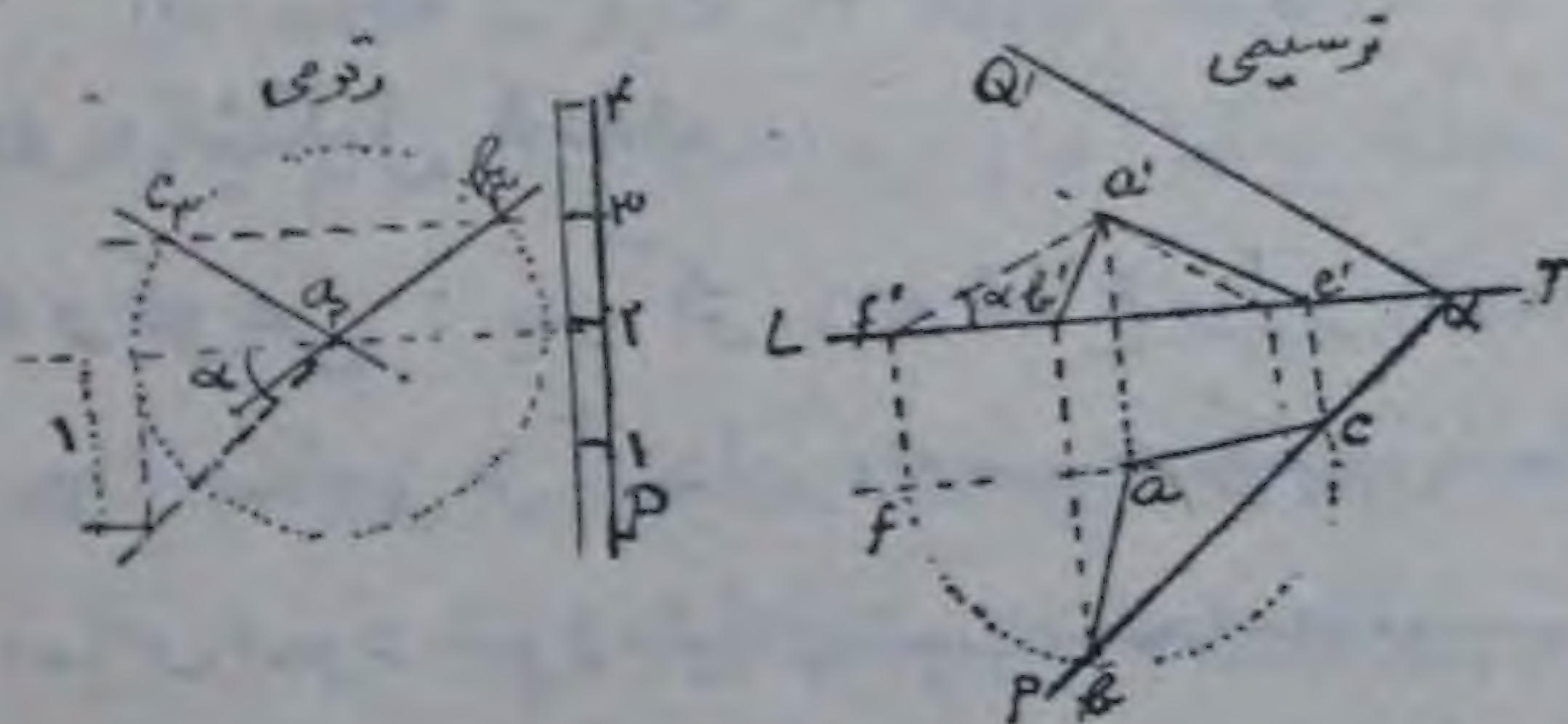
هندسه ترسیمی : bb' اثر افقی خط $\Delta\Delta'$ را تعیین
میکنیم از يك نقطه aa' جبهه ای که با صفحه افق زاویه α بسازد
رسم نموده cc' اثر افقی آنرا بدست میآوریم، بمرکز a و
شعاع ac دایره ای ترسیم نموده از b مماسی بر آن رسم
میکنیم این مماس اثر افقی صفحه مطلوبست (ش ۴۲) اثر قائم
آن بر اثر قائم خط $\Delta\Delta'$ نیز میگذرد .



(ش ۴۲)

۶۸- در صفحه‌ای از يك نقطه خطی رسم کنید که با صفحه افق زاویه α بسازد.

هندسه رقومی - بمرکز a و شعاع $p = \cotg \alpha$ دایره‌ای میزنیم تا اقیه رقوم ۲ صفحه را در b و c قطع کند، ab و ac دو جواب مسئله‌اند (ش ۴۳)

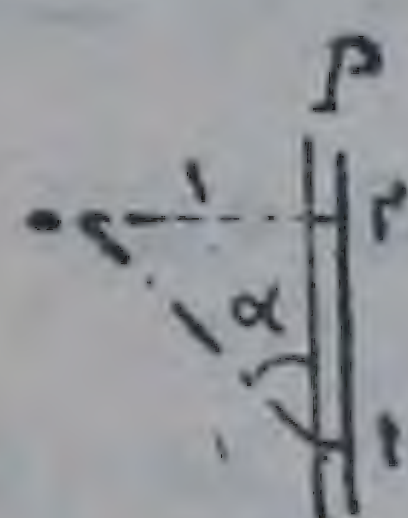


(ش ۴۳)

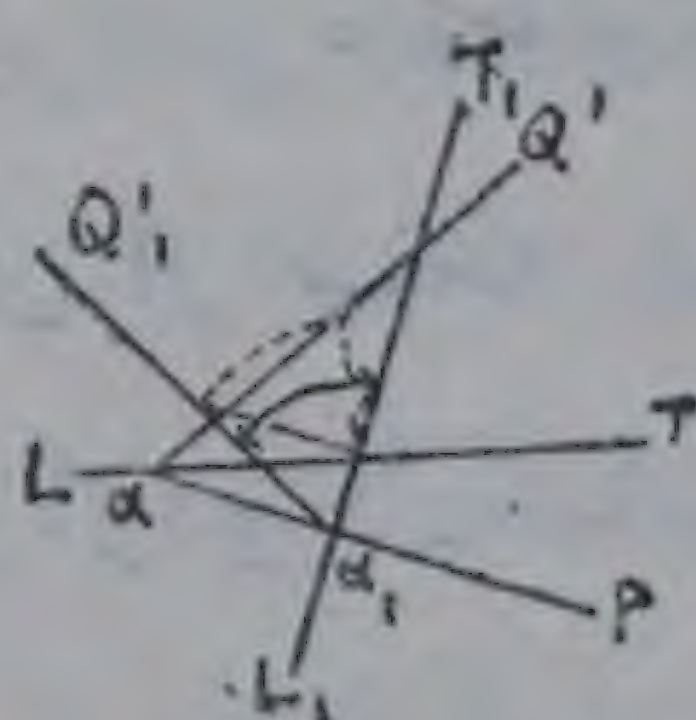
هندسه ترسیمی : از aa' جبهیه ای رسم میکنیم که با افق زاویه α بسازد، ff' اثر افقی آن را بدست می آوریم بمرکز a و شعاع af دایره ای میزنیم تا اثر P را در b و c قطع کند $aba'b'$ و $aca'c'$ جوابهای مسئله‌اند (ش ۴۳)

۶۹ - زاویه صفحه با صفحات تصویر - هندسه
 رقومی: برای تعیین زاویه صفحه P با صفحه افق کافیست زاویه
 تسطیح مقیاس شیب صفحه را با تصویر آن بدست آورد
 (ش ۴۴).

هندسه ترسیمی: برای اینکه زاویه صفحه $Q'P\alpha$ را با
 صفحه افق (قائم) تعیین کنیم بوسیله تغییر صفحه قائم (افقی) آنرا
 بصفحه منتصب (قائم) تبدیل میکنیم و زاویه اثر قائم (افقی) را
 با خط الارض اندازه میگیریم (ش ۴۵، ۱ و ۲)



ش ۴۴



۱



ش ۴۵

۲

۷۰ - زاویه خط با صفحات تصویر

هندسه رقومی: زاویه خط و تسطیح آن.

هندسه ترسیمی - برای آنکه زاویه خط DD' را
 را با صفحه افق (قائم) تعیین نمایم آنرا بوسیله تغییر صفحه
 قائم (افقی) تبدیل بخط جبهی (افقی) میکنیم و زاویه تصویر
 قائم (افقی) را با خط الارض اندازه میگیریم.

۷۱ - نمایش چند روها

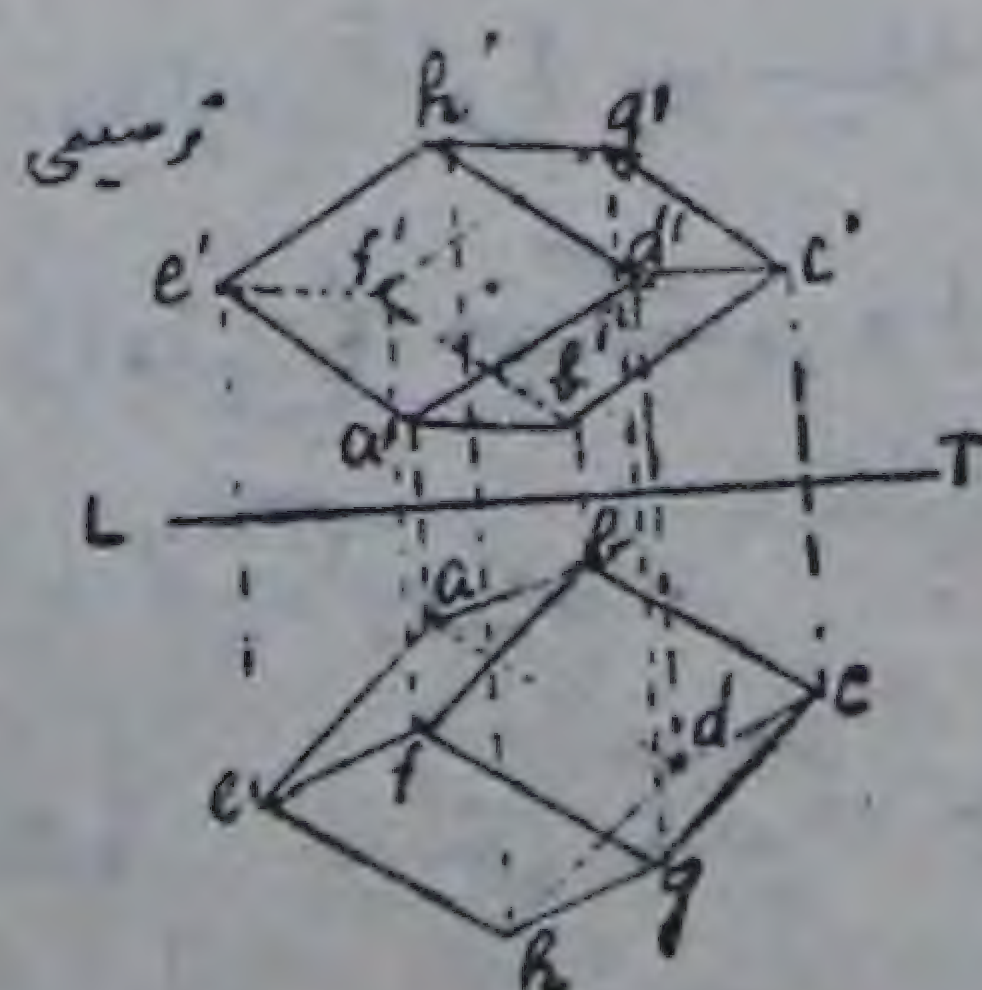
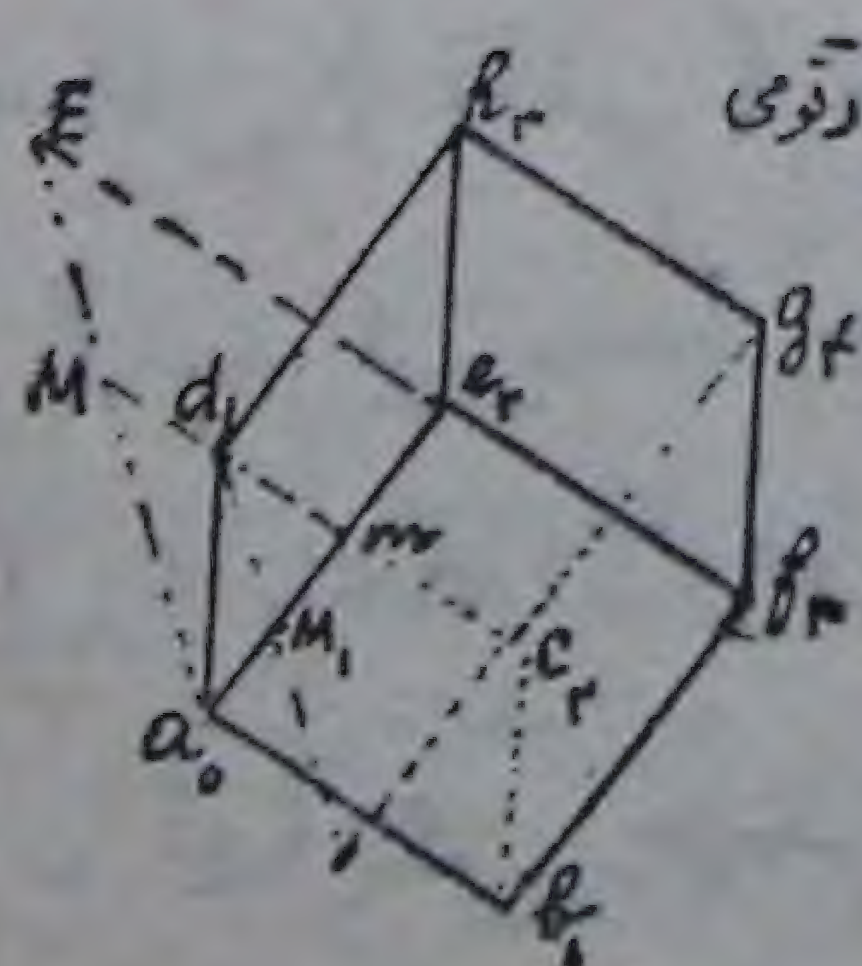
بوسیله تصاویرش نمایش دهند تصاویر رؤس و اضلاع را

رسم میکنند. تصاویر تمام رؤس و اضلاع در داخل خط شکسته مسدودی واقعند که **دوره ظاهری** نامیده میشود.

خطوط واقع در درون دوره ظاهری برخی مرئی و بعضی مخفی میباشد.

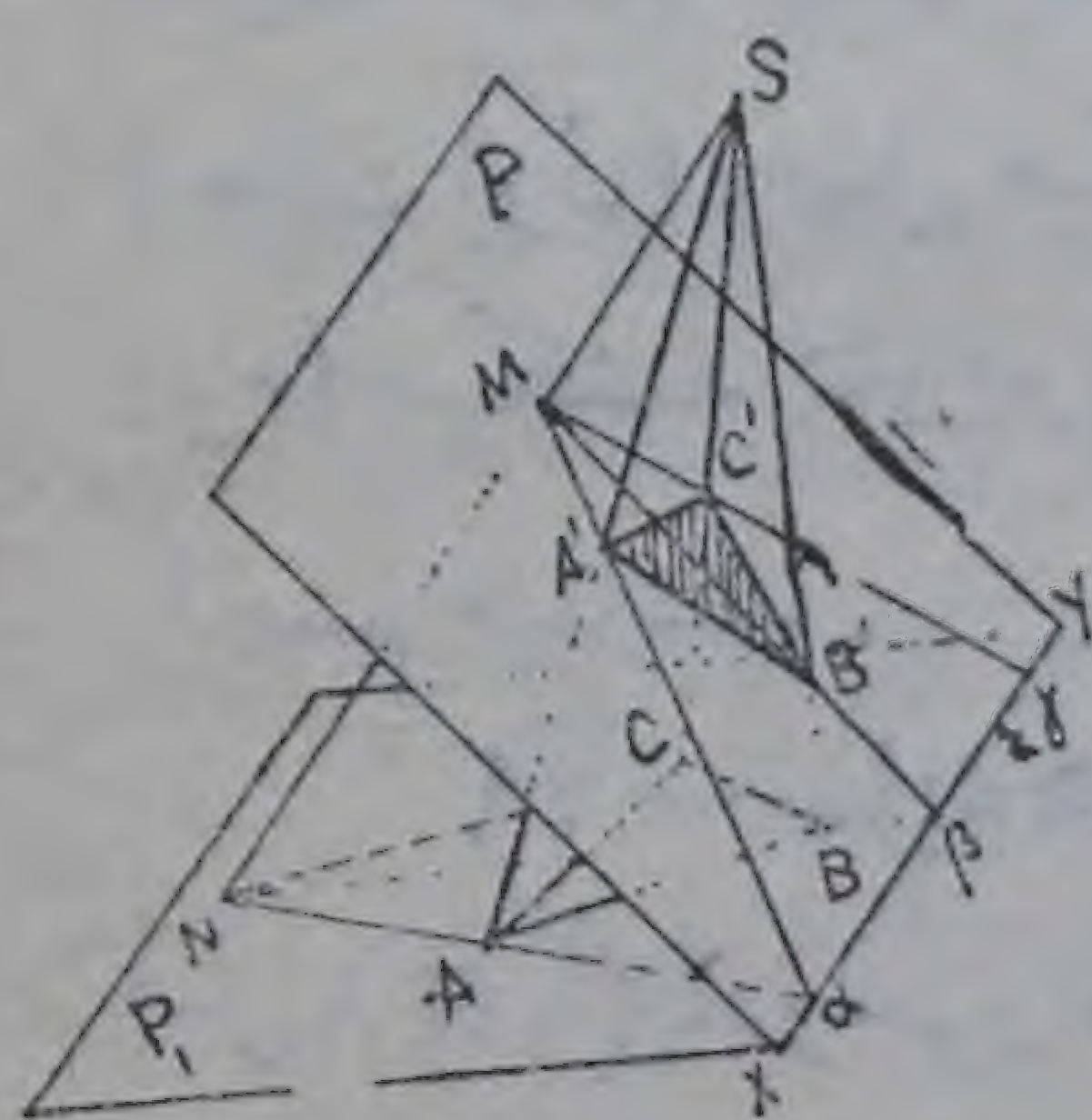
برای تشخیص خطوط مرئی از مخفی فرض میکنیم چشم بفاصله بی نهایت دور از صفحه تصویر واقع باشد در نتیجه خطی که از محل تقاطع ظاهری دو خط واقع در درون دوره ظاهری بجسم وصل شود بر صفحه تصویر عمود میشود. این خط دو یال جسم را که تصاویرشان متقاطعند قطع میکند، هر يك از دو یال که نقطه تقاطع آن از صفحه تصویر دور تر باشد مرئی و دیگری مخفی است. پس از دو یال متناظر که تصاویرشان متقاطع باشند در تصویر افقی آنکه ارتفاع نقطه تقاطع (و در تصویر قائم این که بعد نقطه تقاطع) بر آن بیشتر است مرئی است. هر یال که بیک نقطه غیر مرئی و هر صفحه که بیک یال غیر مرئی محدود گردد غیر مرئی میباشد.

مثال:



ارتفاع m روی Cd کمتر است تا روی ae ، پس ae و در نتیجه fe و eh مرئی هستند.

۷۲ - مقطع اجسام - مقطع هر صفحه در يك چند رو چندبری است که رؤسش فصل مشترك يالهای چند رو با صفحه و اضلاعش فصل مشترك روهای جسم با صفحه اند. پس برای بدست آوردن مقطع بدو طریق میتوان عمل کرد: (۱) تعیین رؤس (۲) تعیین اضلاع.



(ش ۴۷)

۱ - تعیین رؤس - اگر بخواهیم فصل مشترك صفحه P (ش ۴۷) را با هرم $SABC$ پیدا کنیم xy فصل مشترك P با قاعده جسم را بدست میآوریم بعد خطی بر S میگذرانیم تا P و صفحه قاعده را در M و N قطع کند از N به رؤس قاعده وصل نموده امتداد

میدهیم تا xy را در α و β قطع نمایند از α و β به N وصل مینمائیم تا يالهای منتهی بر رؤس وابسته را تلاقی نمایند. این نقاط رؤس مقطعند.

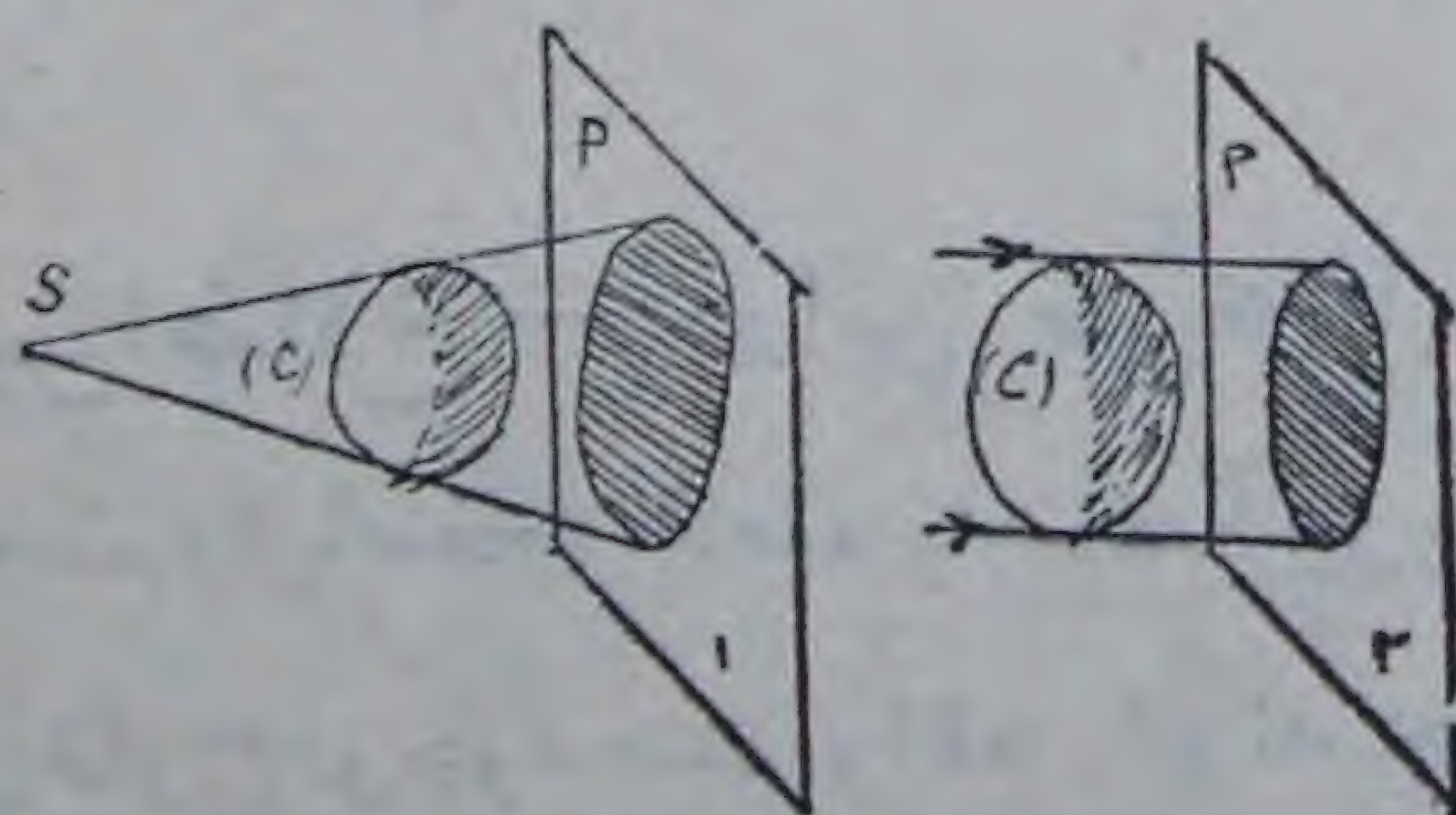
ب - تعیین اضلاع - در این طریقه باید فصل مشترك يكايك روهای جسم را با صفحه قاطع بدست آوریم؛ قسمتی از فصل مشتركها که در خارج وجوه جسم واقع شوند جزء مقطع نیستند

۷۳ - فصل مشترك خط با چند رو - برای بدست آوردن فصل مشترك خط Δ با يك جسم، که نقاط ورود و خروج

خط در جسم نامیده میشوند، بر Δ صفحه اختیاری گذرانیده مقطع آنرا با جسم بدست میآوریم، نقاط برخورد Δ با محیط مقطع نقاط مطلوبند.

اگر جسم دارای رأس باشد، مانند هرم، صفحه فرعی را عموماً بر رأس جسم میگذارند و هر گاه جسم یالهای موازی داشته باشد، مانند منشور، صفحه فرعی را معمولاً بموازات آن یال مرور میدهند و در هر حال نقاط مشترک صفحه فرعی را با محیط قاعده جسم بدست آورده از نقاط تقاطع بر رأس (در حالت اول) وصل میکنند، یا خطوطی موازی یال (در حالت دوم) میکشند تا Δ را قطع کنند، نقاط تقاطع محل تلاقی خط با جسم میباشند.

۷۴ - سایه ها - اگر جسمی در مقابل يك نقطه نورانی (ش ۱، ۴۸) یا در سر راه یک دسته شعاعهای نورانی (ش ۲، ۴۸) قرار گیرد قسمتی از خود جسم تاریك است (سایه خاص) و قسمتی از هر صفحه که در مقابل جسم باشد نیز در سایه است (سایه منتقل)



ش ۴۸

اشعای که بجسم میتابند در صورت اول مخروط و در

صورت دوم استوانه‌ای تشکیل می‌دهند که مخروط یا استوانه سایه نام دارند .

در حالت اول سایه را **مشعلی** و در حالت دوم آن را **شمسی** مینامند .

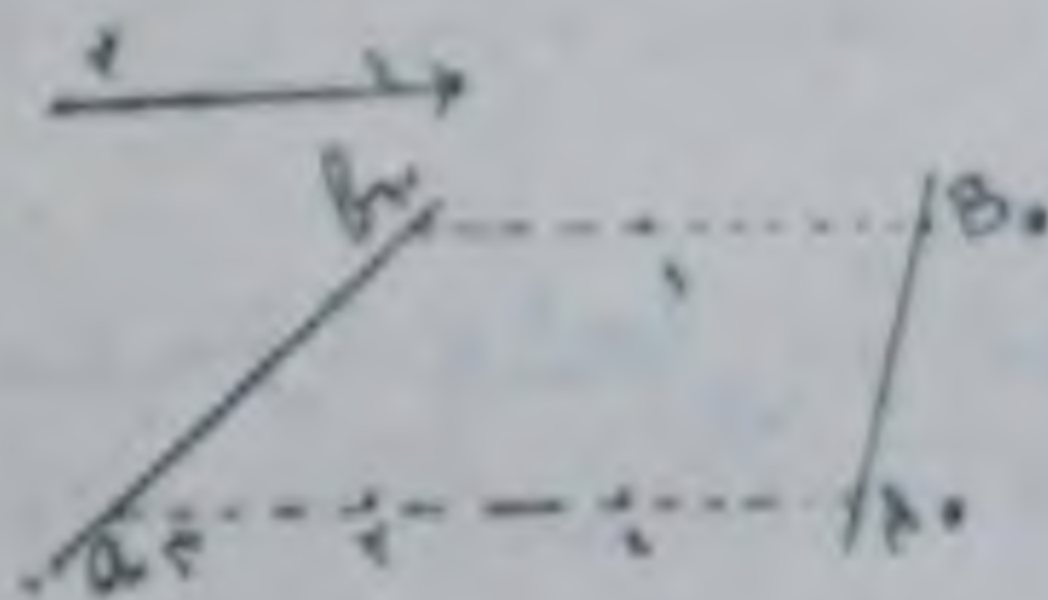
دوره ظاهری سایه منتقل سایه خطی است که مخروط یا استوانه سایه در امتداد آن بر جسم مماس گردیده است. سایه سایر رؤس و یالهای جسم در داخل دوره ظاهری واقع میشوند. ازدویال متنافر که سایه های آنها در درون دوره ظاهری سایه متقاطع میشوند یکی روشن و دیگری تاریک است . برای تشخیص آن که روشن است فصل مشترك شعاع نورانی منتهی بنقطه تقاطع سایه ها را با یالها بدست میآوریم یالی که نقطه تقاطعش بمنبع نور نزدیکتر باشد روشن است .

اگر سایه منتقل یالی در داخل دوره ظاهری واقع شود بر حسب آنکه یال روشن یا تاریک باشد دو روی منتهی بآن روشن یا تاریک خواهند بود .

در صورتیکه سایه رأسی درون دوره ظاهری افتد بر حسب آنکه رأس روشن یا تاریک باشد یالهای منتهی بآن روشن یا تاریک خواهند بود .

مثال - سایه منتقل SA را بموازات امتداد تیر بر صفحه تصویر معین کنید .

رقومی

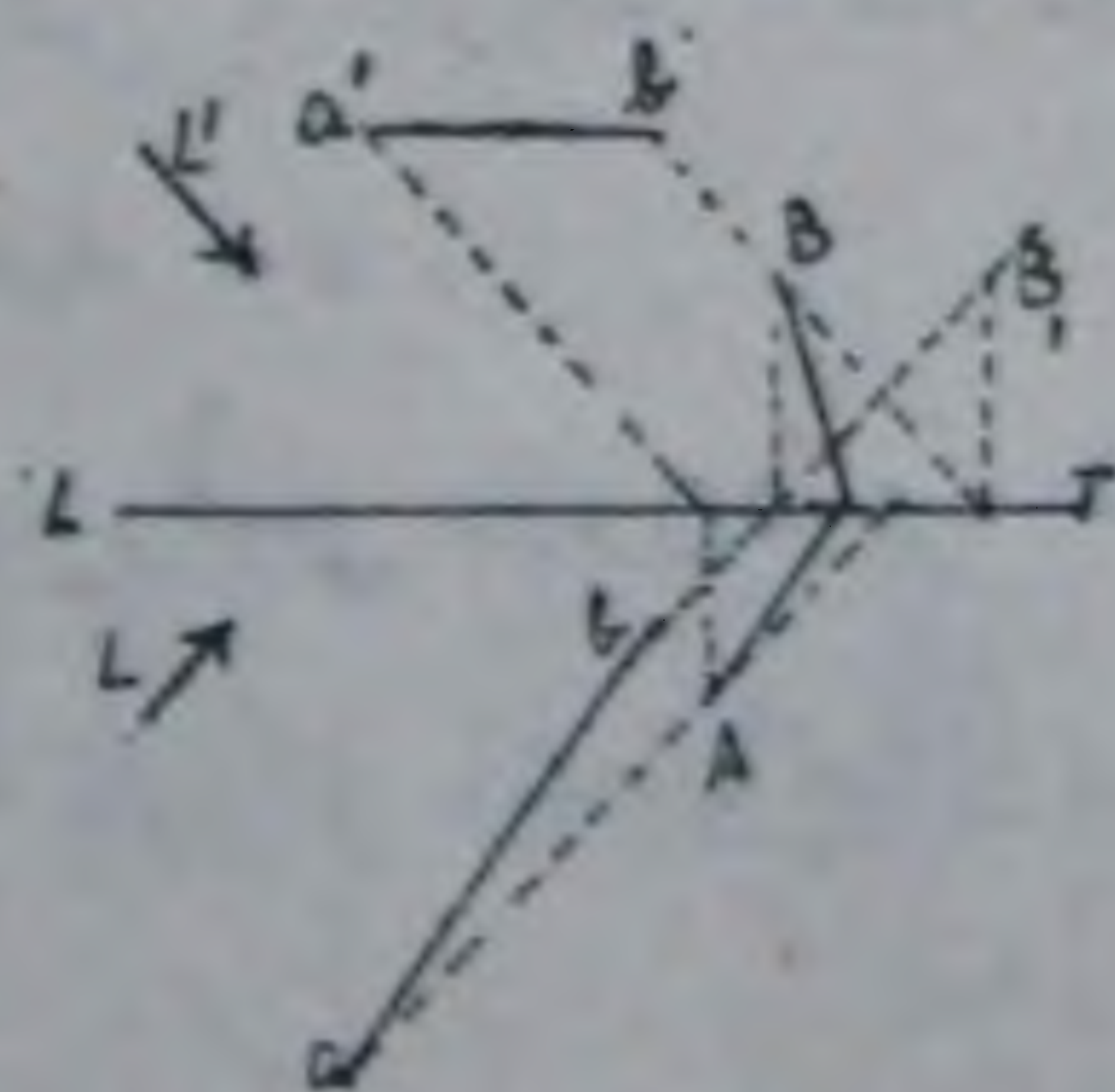


ش ۴۹

ترسیمی

ممکن است قسمتی از سایه يك يال، مانند ab ، بر صفحه افق و قسمتی بر صفحه قائم افتد. برای تشخیص آن باین طریق عمل می کنیم :

فرض میکنیم A سایه aa' بر صفحه افق و B سایه bb' بر صفحه قائم واقع شود B_1 سایه bb' را بفرض اینکه صفحه قائم نباشد بر افق تعیین میکنیم A ، B_1 خط الارض را در α قطع میکند، $A\alpha$ قسمتی از سایه يال BA واقع بر صفحه افق و $B\alpha$ قسمتی از آن واقع بر صفحه قائم است (ش ۵۰)



ش ۵۰

مکانیک

I - بردارها - عزم

۱ - بردارها - بصفحه ۱۹۳ شماره‌های ۱۳۶ تا ۱۴۴

مراجعه شود.

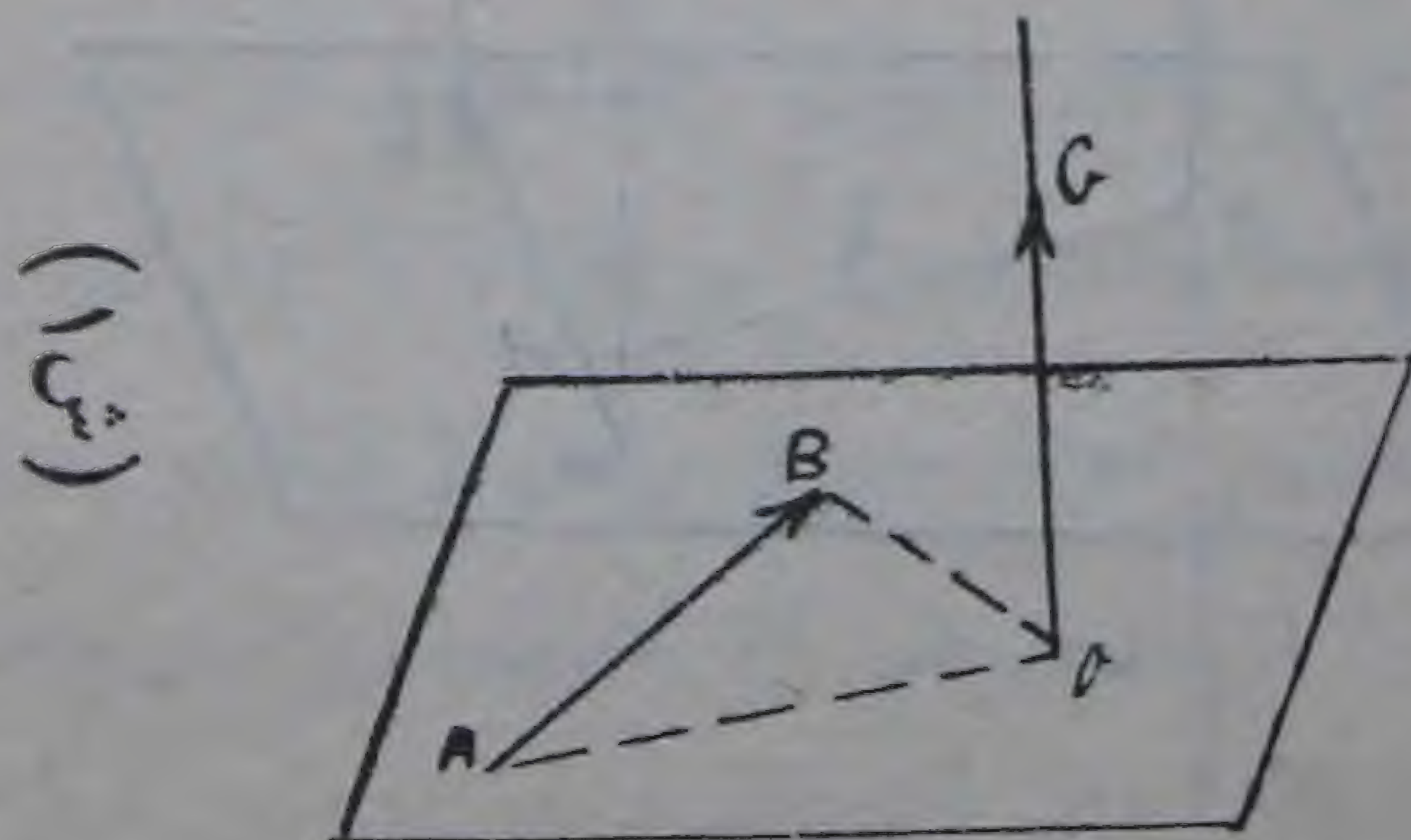
۲ - جهت دوران - اگر شخصی در امتداد محوری بطریقی قرار گیرد که سرش بطرف مثبت محور متوجه باشد برای او جهت مثبت دوران جهت حرکت از چپ بر راست است این جهت را مستقیم و مخالف آنرا معکوس گویند.

دو بردار متعامد نسبت بهم مستقیمند موقعی که اگر شخصی در امتداد یکی از آنها قرار گیرد بطوریکه سرش بطرف انتهای بردار متوجه باشد و بردار دیگر را نگاه کند جهت بردار دوم نسبت با او از چپ بر راست باشد. در غیر این حال دو بردار نسبت بیکدیگر معکوسند.

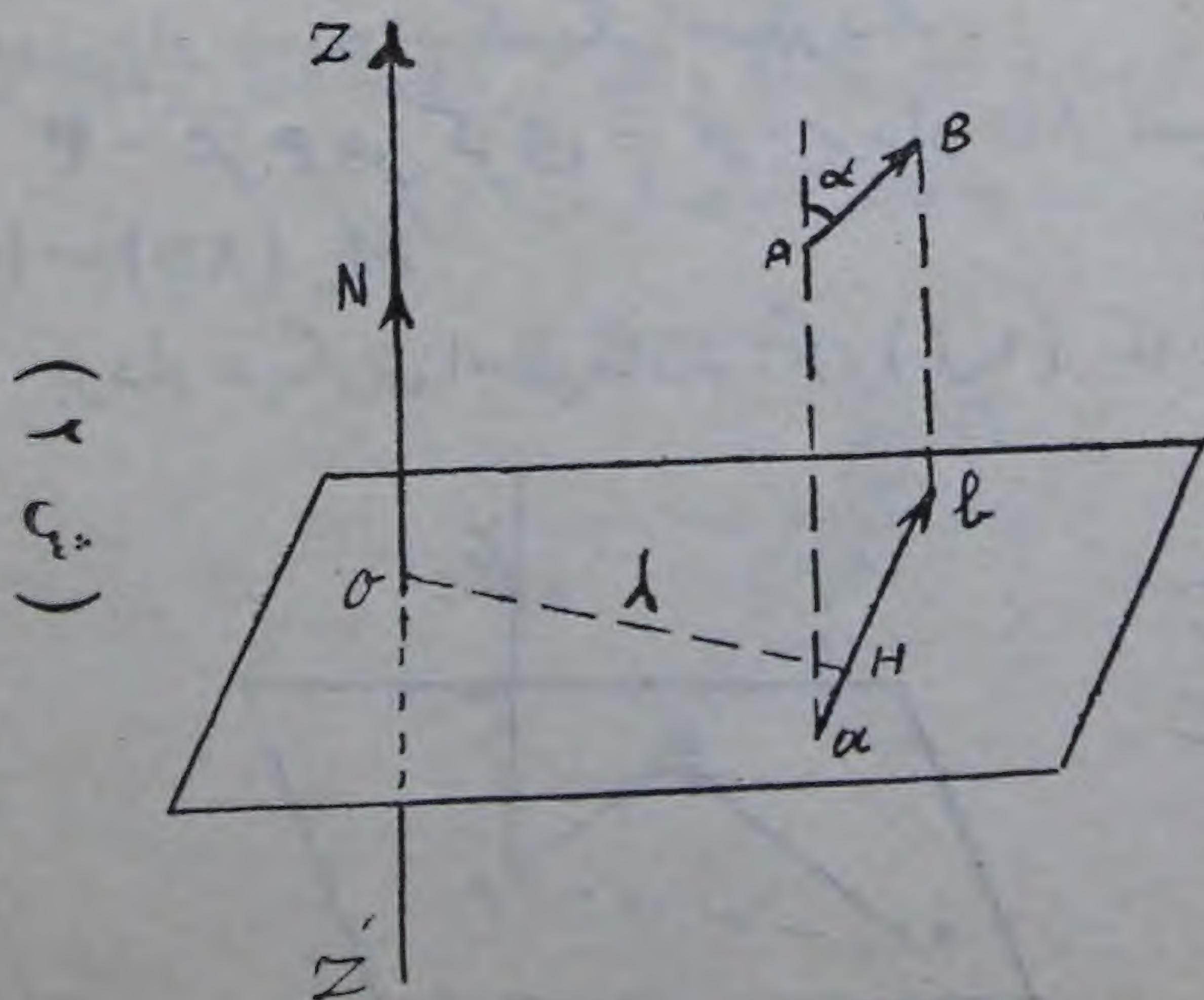
۳ - عزم مرکزی - عزم بردار AB نسبت بنقطه O

$$M_o(AB) = (OG)$$

برداری است مانند OG (ش ۱) که :



- (۱) مبدأ آن نقطه O میباشد .
- (۲) محملش عمودی است که از نقطه O بر صفحه OAB اخراج شود .
- (۳) جهتش نسبت بردار AB مستقیم است .
- (۴) طولش بحسب عدد دو برابر مساحت مثلث OAB است
- ۴- عزمهای دو بردار متقابل نسبت بیک نقطه دو بردار متقابلند
- ۵- عزم یک بردار تغییر نمیکند اگر: (۱) بردار بر محملش حرکت کند (۲) مبدأ آن ثابت بوده انتهایش بر خطی موازی OA تغییر مکان دهد .
- ۶- اگر مرکز عزم بر بردار منطبق یا طول بردار صفر باشد عزم آن صفر است .
- ۷- عزم محوری - عزم بردار (AB) نسبت بمحور ZZ' عبارتست از عزم تصویر قائم (AB) بر صفحه ای که بر ZZ' عمود باشد نسبت بنقطه تقاطع ZZ' با آن صفحه (ش ۲) و اینطور نوشته میشود:



$$M_{zz'}(AB) = M_o(ab) = ON$$

حال اگر α و λ بترتیب زاویه بردار AB و محور و طول عمود مشترك بردار AB و محور ZZ' باشند :

$$ON = AB \cdot \lambda \cdot \sin \alpha$$

- ۸ - عزم محوری يك بردار تغییر نمی‌کند هر گاه : (۱) بردار بر محمل خود حرکت کند (۲) سطح تصویر تغییر نماید .
- ۹ - عزم محوری يك بردار صفر است وقتی : (۱) طول بردار صفر باشد (۲) بردار و محور در يك صفحه باشند .
- ۱۰ - قضیه - تصویر قائم عزم مرکزی يك بردار بر محوری که بر مرکز عزم بگذرد مساوی عزم بردار مفروض نسبت باین محور است .

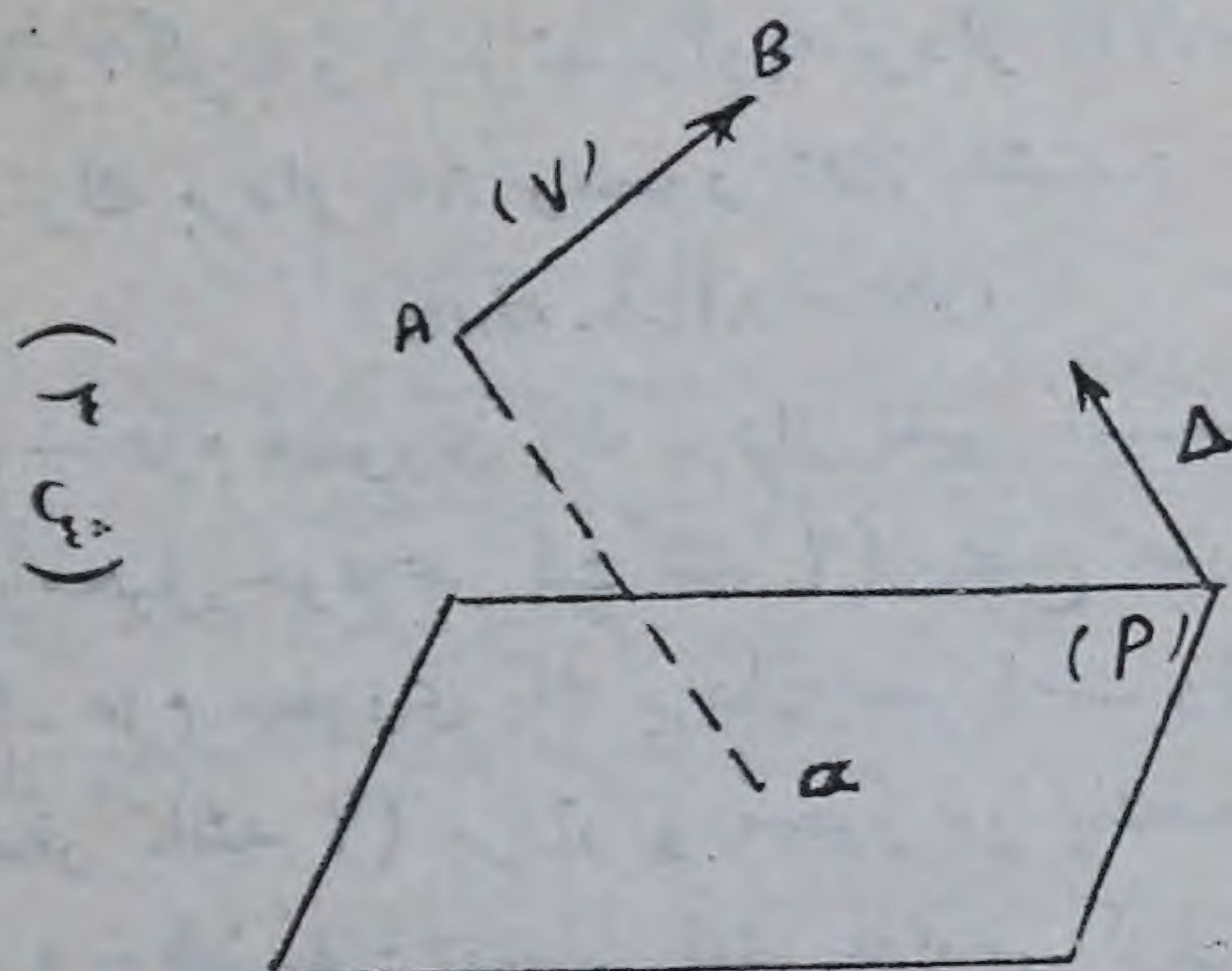
۱۱ - قضیه وارین یون (Varignon) - عزم بر آیند یکدسته بردار متقارب مساوی بر آیند عزمهای بردارهای مفروض است .

۱۲ - تعریف - بر آیند عزمهای دو بردار زوج نسبت بيك نقطه را محور زوج مفروض گویند .

۱۳ - قضیه - محور يك زوج برداری است ثابت .

۱۴ - عزم بردار نسبت بصفحه - هر گاه صفحه P و امتداد Δ داده شده باشند عزم هر بردار (V) نسبت بصفحه P عبارتست از حاصلضرب مقدار جبری بردار (V) در مقدار جبری فاصله نقطه اثر آن از صفحه وقتی که فاصله اخیر بموازات امتداد Δ اندازه گرفته شده باشد (ش ۳)

$$M_P(V) = (V) \cdot Aa$$



اندازه جبری فواصل نقاط اثر در بالای صفحه مثبت و در زیر آن منفی هستند .

اگر بردار در حول نقطه اثر خود دوران کند در عزم آن نسبت بصفحه P تغییری حاصل نمی شود ، اما اگر بر محمل خود حرکت نماید عزم آن تغییر میکند .

علم الحركات (Cinematique)

۱ - تعاریف

۱ - سکون و حرکت - وقتی فاصله نقطه M از نقاط مختلف جسم صلب S تغییر نکند M نسبت بآن جسم ساکن والا متحرك است .

۲ - موضوع علم الحركات بحث در حرکت است بدون توجه بعمل پیدایش آن .

۳ - معادله زمانی متحرك - رابطه $S = f(t)$ را

معادله زمانی متحرك گویند (s مسافت مطویه و t زمان حرکت است)

۴ - مسیر حرکت - راهی را که نقطه متحرك در فضا طی میکند مسیر متحرك نامند. بر حسب آنکه مسیر مستقیم یا منحنی باشد حرکت ، مستقیم الخط یا منحنی الخط است .

II = حرکت مستقیم الخط متشابه

۵ - تعریف - هر گاه متحركی بر مسیر مستقیمی تغییر مکان دهد و در يك جهت مسافتی متناسب با زمان پیماید حرکتش مستقیم الخط متشابه است .

۶ - معادله حرکت - هر گاه s مسافت مطویه ، t زمان ، s_0 مسافت اولیه (فاصله از مبدأ حرکت در لحظه $t=0$) و v سرعت حرکت باشد :

$$s = vt + s_0$$

۷ - بردار سرعت - حاملش مسیر حرکت ، مبدأش نقطه متحرك ، جهتش بر حسب آنکه سرعت مثبت یا منفی باشد در جهت حرکت یا مخالف آنست . قدر مطلق آن مسافتی است که متحرك در واحد زمان میپیماید .

۸ - قضیه - هر حرکت مستقیم الخطی که معادله اش از درجه اول باشد متشابه است .

III = حرکت مستقیم الخط متغیر

۹ - تعریف - وقتی متحرك بر مسیر مستقیمی در زمانهای

متساوی مسافات غیر مساوی طی کند حرکتش مستقیم الخط متغیر است.

۱۰- معادله حرکت از درجه اول بر حسب t و عبارتست

$$s = f(t) \text{ از}$$

۱۱- حامل سرعت - بر مسیر واقع است و مبدأش

نقطه متحرك و جهتش اگر مثبت باشد در جهت مسیر والا بر خلاف آنست. قدر مطلق آن مشتق s یعنی $v = f'(t)$ میباشد.

۱۲- حامل شتاب بر مسیر واقع و قدر مطلقش مشتق ثانی

s یعنی $\gamma = f''(t)$ میباشد، جهتش در صورتیکه تابع v صعودی باشد در جهت مثبت مسیر والا بر خلاف آن است.

۱۳- حرکت را مسرعه گویند اگر سرعت از حیث قدر

مطلق ترقی کند والا مبطئه نامند.

۱۴- دیاگرام حرکت - سه منحنی نمایش تغییرات

توابع s و v و γ را که نسبت بدو محور ot و os رسم شوند دیاگرام حرکت نامند.

IV - حرکت همتشابه تغییر

۱۵- تعریف - وقتی سرعت تابع درجه اولی نسبت

بزمان باشد حرکت مستقیم الخط همتشابه تغییر است.

۱- معادله حرکت

$$s = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t + s_0$$

$$v = \gamma t + v_0$$

$$\gamma = \text{مقدار ثابت}$$

۲- سرعت :

۳- شتاب :

اگر $\gamma > 0$ باشد حرکت مسرعه و اگر $\gamma < 0$ باشد
مبطئه است.

۴- مقدار سرعت بر حسب مسافت:

$$v = \sqrt{2\gamma(s - s_0) + v_0^2}$$

V - حرکت نوسانی ساده

۱۶- تعریف - اگر متحرك M بر محیط دایره‌ای بشعاع R حرکت متشابه داشته باشد تصویرش بر خطی که در صفحه همین دایره واقع باشد دارای حرکت نوسانی ساده خواهد بود.

۱- حرکت نوسانی ساده حرکت مستقیم الخطی است متناوب و بمعادله:

$$x = R \cos(\omega t + \alpha)$$

۲- دوره تناوب: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ؛ تواتر: $n = \frac{1}{T}$

۳- سرعت: $v = -R\omega \sin(\omega t + \alpha)$

۴- شتاب: $\gamma = -R\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -x\omega^2$

۵- پس از حذف t در روابط فوق:

$$v = \pm \omega \sqrt{R^2 - x^2} \quad \gamma = \pm \omega \sqrt{R^2 \omega^2 - \omega^2}$$

VI - حرکت منحنی الخط متشابه

۱۷- قضیه - تصاویر حاملهای سرعت و شتاب حرکت

هر متحرك M بر هر محور سرعت و شتاب حرکت تصویر متحرك M است بر آن محور.

۱۸ - مشخصات حرکت

اگر s مسافت طی شده در روی منحنی، t زمان، x ، y ، z ، مختصات متحرك، v سرعت، v_x ، v_y و v_z تصاویر سرعت بر محورها، γ شتاب، γ_x و γ_y و γ_z تصاویر شتاب بر محورها باشند:

۱ - معادله زمانی حرکت:

$$s = f(t) \quad v = f'(t) \quad \gamma = f''(t)$$

۲ - مختصات زمانی متحرك

$$\begin{aligned} x &= f(t) & y &= g(t) & z &= h(t) \\ v_x &= f'(t) & v_y &= g'(t) & v_z &= h'(t) \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}$$

$$\gamma_x = f''(t) \quad \gamma_y = g''(t) \quad \gamma_z = h''(t)$$

$$\gamma = \sqrt{f''(t)^2 + g''(t)^2 + h''(t)^2}$$

۱۹ - هدگراف - اگر از نقطه A در هر لحظه

برداری همسنگ سرعت رسم کنیم انتهای این بردار منحنی ای می پیماید که هدگراف نام دارد، پس هدگراف مکان هندسی انتهای بردارهایی همسنگ سرعت است که از يك مبدأ رسم شده باشند.

VII. حرکت مستقیم متغیر

۲۰ - تعریف - وقتی مسیر متحرك دایره یا قوسی از آن

باشد حرکت را مستدیر گویند .

۱ - معادله حرکت - اگر θ اندازه زاویه مرکزی
AOM بر حسب رادیان و A مبدأ قوس S و O مرکز و R
شعاع دایره و M متحرك مفروض و s_0 مسافت اولیه باشد :

$$s = R\theta + s_0 \quad \text{و} \quad \theta = f(t)$$

۲ - مختصات نقطه M نسبت به محور OA و محور عمود

بر آن :

$$x = R \cos \theta \quad \text{و} \quad y = R \sin \theta$$

۳ - سرعت زاویه ای $\omega = f'(t)$

۴ - حامل سرعت مماس بر دایره مسیر و اندازه آن
است $v = s' = R\theta'$ یا $v = R\omega$

۵ - شتاب زاویه ای متحرك عبارتست است از $\frac{d\omega}{dt}$ و

شتاب منتهجه عبارت خواهد بود از $\gamma = R \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}$

VIII - حرکت مستدیر متشابه

۱ - معادله حرکت $s = R\omega t + s_0$

۲ - سرعت خطی آن $v = \frac{ds}{dt} = R\omega$

۳ - شتاب $\gamma = R\omega^2$

IX - تغییر دستگاه مقایسه

۲۱ - تعریف - مقصود از تغییر دستگاه مقایسه حل این

مسئله کل است :

۲۲ - مسئله - سه جسم صلب A و B و C مفروضند حرکت B نسبت به A و همچنین حرکت C نسبت به B معلوم است، حرکت C به A را تعیین کنید.

A را دستگاه ثابت و B را دستگاه نسبی مقایسه و حرکتش را نسبت به A کششی و حرکت C را نسبت به B حرکت نسبی و نسبت به A حرکت منتهجه مینامند.

۲۳ - قضیه - منتهجه سرعت حرکت هر نقطه در هر لحظه مجموع هندسی دو سرعت کششی و نسبی آن خواهد بود.

۲۴ - قضیه - هرگاه حرکت کششی انتقالی باشد شتاب منتهجه مساوی منتهجه شتابهای کششی و نسبی است.

X- حرکت انتقالی

۲۵ - تعریف - جسم M نسبت به دستگاه ثابت A دارای حرکت انتقالی است هرگاه هر خط غیر مشخص از جسم M موازی خط ثابتی از دستگاه A باشد، لذا شرط لازم و کافی برای اینکه جسمی دارای حرکت انتقالی باشد اینست که همیشه دو خط متقاطع آن موازی دو خط ثابت از دستگاه مقایسه باشند.

۲۶ - قضیه - وقتی جسمی حرکت انتقالی کند (۱)

مسیر تمام نقاطش قابل انطباقند (۲) در هر لحظه سرعت های جمیع نقاطش بردارهای همسنگند (۳) بردارهای شتاب در هر لحظه همسنگند.

XI = دوران

۴۷ - تعریف - هر گاه دو نقطه از جسمی ضمن حرکت نسبت بیکدیگر مستگاه مقایسه ثابت بمانند آن جسم حول خط واصل بین آن دو نقطه دوران میکند و آن خط را محور دوران گویند مسیر هر يك از نقاط جسم ضمن دوران دایره ایست عمود بر محور دوران - حامل دوران محملش محور دوران و جهتش نسبت بجهت دوران نقاط مثبت و کمیتش مساوی اندازه عددی سرعت زاویه ای يك نقطه جسم در لحظه معین است. سرعت هر نقطه از جسم ضمن دوران در هر لحظه مساوی عزم حامل دوران در آن لحظه نسبت بآن نقطه میباشد.

علم القوی (Dynamique)

تعاریف :

۴۸ - علم القوی یا دینامیک در حرکات و علل موجدۀ آنها بحث میکند.

۴۹ - چون تعادل اجسام حالت خاصی از حرکت است علم تعادل قوی یا استاتیک (Statique) حالت مخصوصی از دینامیک میباشد.

۳۰ - اصل جبر Principe de L'inertie (کپلر) - نقطه مادی بخودی خود از سکون بحرکت یا از حرکت بسکون در نمیآید.

۳۱ - نتیجه - ۱) اگر نقطه مادی ساکن باشد و

عاملی بر آن اثر نکند همواره ساکن میماند .
 (۲) اگر نقطه مادی متحرك باشد و عاملی بر آن اثر نکند همواره متحرك بوده حرکتش مستقیم الخط متشابه است .
 (۳) تغییر وضع نقطه مادی از حرکت بسکون یا بالعکس در اثر عاملی است که قوه نامیده میشود .

۳۲- اثر قوه بر نقطه مادی تولید شتاب در آن میباشد .

۳۳- همواره بین قوه وارد بر نقطه مادی و شتاب نظیر

آن نسبت ثابت $m = \frac{F}{\gamma}$ برقرار است مقدار این نسبت ثابت m را جرم نقطه مفروض مینامند .

۳۴- رابطه $\frac{F}{\gamma} = m$ رابطه اصلی مکانیک نام دارد .

۳۵- جسمی که در خلاء رها شود بطور قائم بسمت

زمین فرود میآید و حرکتش متشابه التغییر است . قوه ای که باعث این شتاب ثابت میشود وزن جسم است؛ پس بین P وزن جسم و m جرم آن و g شتاب ثقل این رابطه برقرار است :

$$P = mg$$

۳۶- بین P و P' وزنهای دو جسم و m و m' جرم-

های آنها در هر نقطه از زمین این رابطه برقرار است :

$$\frac{P}{P'} = \frac{m}{m'}$$

۳۷- اصل استقلال آثار قوا (گالیله) - اثر چند

قوه که با هم بر یک نقطه مادی وارد شوند نظیر همان اثریست که مجموع هندسی آنها در آن نقطه تولید کند .

۳۸ - اصل تساوی عمل و عکس العمل (نیوتن)

هر عملی عکس‌العملی مساوی و در جهت مخالف با خود ایجاد میکند .

XIII - تبادل نقطه مادی

۳۹ - نقطه مادی در حال تبادل است وقتی که تحت

تأثیر هیچ قوه‌ای نباشد، یا قوایی که بر آن وارد میشوند شتابی در آن ایجاد نمایند . در این حال اگر نقطه سرعتی داشته باشد مطابق اصل کپلر حرکت آن همیشه مستقیم‌الخط متشابه است و تبادل چنین نقطه‌ای را **تبادل دینامیکی** مینامند؛ ولی هرگاه نقطه در لحظه معینی ساکن باشد همیشه ساکن خواهد بود و تعادلش **تبادل استاتیکی** است .

۴۰ - نقطه را آزاد گویند وقتی که بتواند در اثر قوای

وارد در جهات مختلف حرکت کند در غیر این صورت نقطه **غیر آزاد** است .

۴۱ - نقطه غیر آزاد تحت تأثیر دو نوع قوه است :

۱ - قوای مستقیم (مانند وزن نقطه)

۲ - قوای وابسته که بوسیله موانع ایجاد میشوند .

XIV - استاتیک نقطه آزاد

۴۲ - قضیه - شرط لازم و کافی برای تبادل نقطه مادی

آزادی که تحت تأثیر چند قوه واقع شود اینست که نتیجه این

قوا صفر باشد. شرط فوق بطریق تحلیلی اینطور بیان میکرد :

اگر $(X_1 \text{ و } X_2 \text{ و } \dots \text{ و } X_n)$ و $(Y_1 \text{ و } Y_2 \text{ و } \dots \text{ و } Y_n)$

و (Z_1 و Z_2 و ... و Z_n) تصاویر قوا و X و Y و Z تصاویر R منتهی آنها بر سه محور مختصات متعامد باشند شرط تعادل اینست که $R = 0$ یعنی :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = 0$$

۴۳ - رابطه استون (Stévin) - برای اینکه نقطه

مادی در تحت تأثیر سه قوه بحال تعادل باشد لازم و کافی است که :

- ۱ - هر سه قوه در یک صفحه باشند .
- ۲ - هر کدام خارج زاویه دو قوه دیگر قرار گیرد .
- ۳ - مقدار هر یک متناسب با جیب زاویه بین دو قوه دیگر باشد یعنی :

$$\frac{F_1}{\sin(F_2 \text{ و } F_3)} = \frac{F_2}{\sin(F_3 \text{ و } F_1)} = \frac{F_3}{\sin(F_1 \text{ و } F_2)}$$

XV - استاتیك نقطه غیر آزاد

۴۴ - هر گاه نقطه ای در تحت تأثیر قوای چندی که بر آیند

آنها R باشد بر یک سطح یا یک منحنی تغییر مکان دهد ممکن است : ۱) فقط بتواند بر سطح یا منحنی تغییر مکان دهد ولی از آن نتواند جدا شود ؛

(۲) بر سطح متکی باشد و یعنی بتواند از یکجهت از سطح جدا شود؛ در اینصورت اثر R فقط آنستکه نقطه را بر روی سطح نگاه میدارد.

۴۵ - فشار و عکس العمل - نقطه غیر آزاد M در تحت تاثیر R بر آیند قوای وارد بر آن، بر سطح یا منحنی عملی مساوی R بنام فشار وارد میآورد و سطح یا منحنی در مقابل بر نقطه M فشار متقابلی مانند R' موسوم به عکس-العمل وارد میسازد. عکس العمل قوه ایست وابسته به R' مساوی R و درجهت مخالف آنست.

۴۶ - اصطکاک (۱ - ممکنست سطح یا منحنی کاملاً صیقلی (بی اصطکاک) باشد. R و R' بر آن عمودند. (۲) و نیز ممکنست خشن (با اصطکاک باشند) و در اینصورت R و R' با آن زاویه ای میسازند، مقدار این زاویه بستگی با درجه خشونت (اصطکاک) جسم دارد. θ زاویه R و R' با سطح یا منحنی را زاویه اصطکاک و $tg\theta$ را ضریب اصطکاک میگویند.

۴۷ - مخروطی که رأسش نقطه مادی واقع بر سطح و محورش عمود بر سطح و زاویه رأسش دو برابر زاویه اصطکاک باشد به مخروط اصطکاک معروف است.

۴۸ - قضیه - شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه مادی واقع بر سطح یا منحنی بی اصطکاک بحال تعادل باشد آنست که R ، منتهی قوای وارد، بر سطح یا منحنی عمود بوده و نقطه را بر آن بچسبانند.

۴۹- قضیه - شرط تعادل نقطه مادی واقع بر سطح یا منحنی با اصطكاك آنست كه زاویه بین R بر آیند قوا و قائم بر نقطه از زاویه اصطكاك كوچكتر باشد یا بعبارت دیگر نتیجه قوا داخل مخروط اصطكاك و یا منطبق بر سطح آن باشد .

۵۰- قوانین اصطكاك (Coulomb) :

- ۱- قوه اصطكاك حد با فشار قائم متناسب است .
- ۲- قوه اصطكاك بوسعت سطح اتكا بستگی ندارد .
- ۳- قوه اصطكاك بجنس سطح و میزان صیقلی بودن آن و ماده ای كه سطح را بآن اندوده باشند بستگی دارد .

XV = دیناميك نقطه

۵۱- موضوع دیناميك تعیین روابط بین قوه و شتاب و سرعت و کار است .

۵۲- اثر قوه تولید شتاب است در متحرك • شتاب باعث تغییر سرعت است .

۵۳- دستورهای اصلی دیناميك - اگر X و Y و

Z تصاویر قوه F بر سه محور و $\frac{d^2 x}{dt^2}$ و $\frac{d^2 y}{dt^2}$ و $\frac{d^2 z}{dt^2}$ تصاویر

شتاب بر آنها باشند.

$$F = m\gamma ; X = \frac{md^2 x}{dt^2} ; Y = \frac{md^2 y}{dt^2} ; Z = \frac{md^2 z}{dt^2}$$

بكمك دستورهای اصلی دیناميك میتوان این دو مسئله را حل کرد :

(۱) تعیین حرکتی که نقطه‌ای بجرم m تحت تأثیر قوه F انجام میدهد.

(۲) تعیین قوه‌ای که موجب حرکت معینی برای نقطه‌ای بجرم m میشود.

XVII - حرکت نقطه‌مادی آزاد

۵۴- اولاً حرکت در امتداد قائم - ۱- اگر جسمی بجرم m از مبدأ O واقع بر امتداد قائم با سرعت اولیه v_0 در خلأ رها شده باشد تنها قوه‌ای که بر آن وارد میشود وزن آن یعنی mg است و مسیر حرکت همان امتداد قائم خواهد بود.

۲- قوانین حرکت - اگر جهت از پائین بیالا مثبت فرض شود:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

$$v = -gt + v_0$$

$$\gamma = -g$$

۳- اگر $v_0 < 0$ باشد حرکت از بالا پائین و معکوس و مسرعه است.

۴- اگر $v_0 > 0$ باشد حرکت از پائین بیالا و در فاصله

زمانی $t < \frac{v_0}{g}$ مستقیم و مبطئه است و متحرک بازا

$t = \frac{v_0}{g}$ در فاصله $\frac{v_0^2}{2g}$ به اوج میرسد و پس از آن حرکت

معکوس و مسرعه میشود.

۵- در هر نقطه از مسیر متحرک دارای دو سرعت قرینه

$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gz}$ می باشد که یکی سرعت صعود و دیگری سرعت نزول است.

۶- زمان صعود تا هر نقطه از مسیر مساوی زمان برگشت از آن نقطه به محل اولیه می باشد.

۵۵- ثانیا حرکت سهمی شکل

۱- اگر جسمی بجرم m در مبداء زمان ($t=0$) از مبداء O با سرعت اولیه v_0 در امتدادی که با افق زاویه $0 < \alpha < 90^\circ$ دارد در خلاء پرتاب شده باشد تنها قوه ای که بر آن وارد میشود وزن آن خواهد بود و مسیر حرکت منحنی مسطحی است که در صفحه قائم xOz قرار دارد.

۲- قوانین حرکت

$$\left. \begin{array}{l} \text{تساوی بر محور} \\ \text{قائم } Oz \end{array} \right\} \begin{cases} \gamma_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = -g \\ v_z = \frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha \\ z = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{تساوی بر محور} \\ \text{افقی } Ox \end{array} \right\} \begin{cases} \gamma_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \\ v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \\ x = v_0 \cos \alpha \cdot t \end{cases}$$

۳- معادله سهمی مسیر

$$z = \frac{-g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \cdot x$$

۴ - ارتفاع نقطه اوج و زمان رسیدن به آن

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad \text{و} \quad z = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

۵ - برد یا میدان حرکت: $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$

۶ - هدگراف (بمبداء O)

$$x = v_0 \cos \alpha \quad \text{خط (موازی Oz)}$$

۷ - دوفاصله $t < \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ حرکت مبطئه، در آن لحظه

سرعت می نیم و مساوی $v_0 \cos \alpha$ و پس از آن حرکت مسرعه می باشد.

۸ - در هر نقطه با ارتفاع z : $|v| = \sqrt{v_0^2 - 2gz}$

۹ - پارامتر سهمی $\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$ و فاصله هادی از مبدا

$$\frac{v_0^2}{2g} \quad \text{است}$$

۱۰ - معادله سهمی اطمینان:

$$z = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$$

XVIII = حرکت نقطه مادی غیر آزاد

۵۶ - حرکت بی اصطکاک - نقطه M روی يك منحنی

صیقلی تحت تأثیر قوه R و عکس العمل R' تغییر مکان میدهد:

تصویر R بر قائم بر صفحه در امتداد R' است و خنثی میشود و فقط

تصویر R بر مماس بر سطح است که M را بحرکت در می آورد.

اگر تصویر R بر مماس را R_t بنامیم : بموجب رابطه
 $F = m\gamma$

$$R_t = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

این رابطه را معادله اصلی Intrinsèque حرکت میگویند .

۵۷- حرکت با اصطکاک - در این صورت عکس العمل

R' با سطح زاویه θ (زاویه اصطکاک) میسازد و قوای مؤثر بر نقطه عبارتست از برآیند تصاویر R و R' بر مماس بر سطح . پس :

$$R_t + R'_t = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

۵۸ - مثال : حرکت نقطه بر سطح مورب - اگر

زاویه سطح مورب را با افق α و سرعت اولیه حرکت را v_0 بنامیم :

(۱) بی اصطکاک : اگر $v_0 = 0$ باشد

$$\gamma = g \sin \alpha ; v = g \sin \alpha t ; x = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$$

هر گاه v_0 صفر نباشد

$$\gamma = g \sin \alpha ; v = g \sin \alpha t + v_0$$

$$x = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + v_0 t$$

هر گاه $v_0 < 0$ باشد (طرف بالا منفی فرض میشود) حرکت تا زمان

$$\text{مبطئه} = t \frac{v_0}{g \sin \alpha} \text{ (رو بالا) و از آن پس مسرعه (رو$$

بیائین) خواهد بود.

۲ - با اصطكاك

زاویه اصطكاك را ضمن حرکت θ فرض میکنیم نقطه

M تحت تأثیر وزن خود (mg) و عکس العمل R' میباشد؛
(۱) حرکت بطرف پائین: $v_0 > 0$ - قوانین حرکت

عبارتند از:

$$v = g \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos \theta} t + v_0, \quad \gamma = \frac{g \sin(\alpha - \theta)}{\cos \theta}$$

$$x = \frac{1}{2} g \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos \theta} t^2 + v_0 t$$

موقعی که $\theta < \alpha$ میباشد اگر $v_0 = 0$ باشد نقطه بحال

تعادل خواهد ماند و اگر $v_0 > 0$ باشد تا زمان $\frac{v_0 \cos \theta}{g \sin(\theta - \alpha)}$

حرکت مستقیم مبطئه و از این ببعء متحرك در فاصله

$$x_1 = \frac{v_0^2 \cos \theta}{2 g \sin(\theta - \alpha)} \text{ بحال تعادل خواهد ماند.}$$

موقعی که $\theta = \alpha$ میباشد اگر $v_0 = 0$ باشد نقطه بحال

تعادل خواهد ماند و اگر $v_0 > 0$ باشد حرکت متشابه میشود.

موقعی که $\theta > \alpha$ باشد حرکت متشابه التغير مسرعه

است.

(۲) حرکت بطرف بالا: $v_0 < 0$ - قوانین حرکت

عبارتند از:

$$v = g \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\cos \theta} t + v_0 \quad \text{و} \quad \gamma = g \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\cos \theta}$$

$$x = \frac{1}{2} \frac{g (\sin \alpha + \theta)}{\cos \theta} t^2 + v_0 t$$

تا زمان $t = \frac{v_0 \cos \theta}{g \sin(\alpha + \theta)}$ حرکت معکوس و مبطئه در

این زمان متحرك بفاصله $x_1 = \frac{-v_0^2 \cos \theta}{2 g \sin(\alpha + \theta)}$ قرار داشته و از این

ببعد حرکت وضع حالت اول (شماره ۴۹-۱) را بخود میگیرد

XIX = کار

۵۰. اگر نقطه مادی M در اثر نیروی F و در امتداد

F تغییر مکانی مساوی DD' دهد کاری مساوی $T = (DD')(F)$ انجام شده است

۶۰. هر گاه α زاویه بین حامل F و امتداد DD' باشد

کار عبارت خواهد بود از: $T = F \cdot DD' \cdot \cos$ (F و DD')

این کار مثبت است هر گاه $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$ یا

$\alpha > \frac{3\pi}{2}$ باشد و آنرا **کار محرك** نامند و منفی است وقتی

که $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ باشد و آنرا **کار مقاوم** نامند؛ اگر

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ یا $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ باشد کار صفر است.

XX = قوه حيه (Force vive)

۶۱ - تعريف - فرس و یو یا قوه حيه يك نقطه مادی بجرم

m که با سرعت v حرکت کند عبارتست از mv^2

۶۲ - نصف فرس و یو $(\frac{1}{2} mv^2)$ را انرژی حرکتی

énèrgie cinétique نقطه گویند.

۶۳ - قضیه - تغییرات انرژی حرکتی يك نقطه مادی

متحرك بين دو نقطه t_0 و t مساویست با حاصل جمع کارهای قوای وارد بر نقطه بین این دو لحظه .

XXI - استاتیک جسم صلب

۶۴ - قوای وارد بر جسم صلب عبارتند از: ۱) قوای

خارجی ۲) قوای درونی.

۱) قوای خارجی از نقاط مادی خارج از جسم ناشی

میشوند و خود بدو قسمت میشوند: ۱) قوای مستقیم ۲) قوای ارتباطی خارجی.

۲) قوای درونی از اعمال متقابل نقاط خود جسم ناشی

میگردند و عبارتند از عکس العمل های ملکولی و قوای ارتباطی داخلی.

۶۵ - جسم صلب را در حال تعادل استاتیکی گویند

وقتی که اگر آنرا بدون سرعت اولیه بحال خود گذارند در اثر قوای وارد بر آن نسبت بدستگاه مقایسه بیحرکت بماند.

۶۶ - شرط لازم برای اینکه جسمی در حال تعادل باشد

آنست که (OR) مجموع هندسی قوای خارجی وارد بر آن

و (OG) منتهی عزم این قوا صفر باشد یعنی: $(OR) = 0$ و

$(OG) = 0$

۶۷ - تعادل دستگاهها - دو دستگاه قوا متعادلند

و قتیکه اثر آنها در یک جسم یکسان باشد.

۶۸ - قضیه - شرط لازم برای تعادل دو دستگاه قوا آنست

که مجموع هندسی آنها با هم و منتهی‌عزمشان نسبت بنقطه غیر

مشخصی با هم مساوی باشند یعنی $(OR) = (OR')$ و $(OG) = (OG')$

این شرایط برای اجسامیکه تغییر شکل نمیدهند لازم و کافی است.

XXII - اعمال مقدماتی

همیشه میتوان بوسیله اعمالی بنام اعمال مقدماتی دستگاه

قوای را بدستگاهی دیگر معادل با آن تبدیل نمود. این اعمال عبارتند از:

۱ - لغزاندن قوه بر محمل آن.

۲ - تبدیل چند قوه متقارب بمجموع هندسی آنها و بعکس تجزیه یک قوه بمؤلفه‌های خود.

۳ - اضافه یا کسر نمودن دو قوه متقابل.

۶۹ - بوسیله اعمال مقدماتی دستگاه قوای وارد بر

جسم را بدستگاهی معادل با آن که مؤلفات کمتری داشته باشد

تبدیل میکنند و از این راه حالت و وضع حرکت جسم را تعیین مینمایند.

۷۰ - مختصات مرکز قوای موازی - اگر بیچند نقطه

مادی A_1 و A_2 و \dots و A_m از یک جسم بترتیب قوایی موازی

یکدیگر با مقادیر جبری F_1 و F_2 و ... و F_n وارد شوند و مختصات نقاط مذکور نسبت به سه محور متعامد $A_1(x_1, y_1, z_1)$ و $A_2(x_2, y_2, z_2)$ و ... و $A_n(x_n, y_n, z_n)$ و مختصات مرکز این قوا x و y و z باشند:

$$x = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_n F_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \frac{\sum F_n x_n}{\sum F_n}$$

$$Y = \dots = \frac{\sum y_n F_n}{\sum F_n} \quad \text{و}$$

$$Z = \dots = \frac{\sum z_n F_n}{\sum F_n}$$

وقتی قوای مزبور با یکدیگر مساوی باشند مختصات مرکز آنها چنین میشود:

$$x = \frac{\sum x_n}{n} \quad \text{و} \quad y = \frac{\sum y_n}{n} \quad \text{و} \quad z = \frac{\sum z_n}{n}$$

۷۱- قضیه - همیشه ممکن است قوای وارد بر جسمی را بسه قوه که نقاط اثرشان سه نقطه دلخواه واقع بر يك استقامت باشند تبدیل نمود.

۷۲- قضیه - ممکن است قوای وارد بر جسمی را بسه قوه که یکی از آنها بر نقطه اختیاری معینی وارد شود تبدیل نمود.

XXIII - مرکز ثقل

۷۳- تعریف - اوزان نقاط مادی يك جسم قوای

متوازی قائمی هستند که مرکز آنها مرکز ثقل جسم (G) است و
منتجه آنها بردار است قائم که بر نقطه G میگذرد.

۷۴ - مختصات مرکز ثقل - اگر m_1 و m_2 و ... و

m_n به ترتیب جرمهای نقاط مادی A_1 و A_2 و ... و A_n جسمی
باشند و هر یک از نقاط فقط تحت تأثیر قوای حاصل از وزن
خود قرار گیرند مختصات مرکز ثقل جسم مزبور نسبت به
محور متعامد عبارتند از :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

۷۵ - اجسامی که شکل آنها ثابت است اگر هم محلشان

تغییر کند یا از وضع اولیه منحرف شوند مرکز ثقلشان
تغییر نمیکند.

۷۶ - جسمی را متشابه الاجزاء گویند اگر هر دو جزء

متساوی الحجم از آن متساوی الجرم باشند.

۷۷ - قضیه - شکلی که دارای مرکز یا محور یا (سطح

تقارن است مرکز ثقلش بر این مرکز یا محور یا سطح تقارن
قرار دارد.

۷۸ - یک شکل مستوی (یا یک جسم) دارای یک قطریا

یک صفحه قطری) وابسته بامتداد \triangle است وقتی که جمیع نقاط

آن شکل مستوی (یا جسم) را بتوان بدو دسته چنان تقسیم نمود که خط واصل بین هر نقطه یکدسته و نقطه نظیرش در دسته دیگر موازی امتداد \triangle بوده و وسطش بر آن قطر (یا صفحه قطری) واقع گردد.

۷۹- قضیه- شکلی که دارای قطر یا صفحه قطری نظیر امتداد معینی باشد (۷۸) مرکز ثقلش بر این قطر یا صفحه قطری قرار دارد.

۸۰- مرکز ثقل قطعه خط مستقیم - نقطه وسط آن است.

۸۱- مرکز ثقل محیط مثلث - مرکز دایره محاطی مثلثی است که از وصل مواضع میانه‌های آن بدست می‌آید

۸۲- مرکز ثقل سطح مثلث - نقطه تلاقی سه میانه آن است.

۸۳- مرکز ثقل چهارضلعی - نقطه تلاقی دو خط واصل بین مراکز ثقل چهار مثلثی است که به ترتیب از دو ضلع متقاطع چهارضلعی و یک قطر تشکیل میشود.

۸۴- مرکز ثقل ذوزنقه‌ای بقواعد B و b و مرکز ثقل G بفرض اینکه H و H' مواضع عمودهای مرسوم از G بر دو قاعده باشند از این رابطه بدست می‌آید:

$$\frac{GH}{GH'} = \frac{B + 2b}{2B + b}$$

۸۵- مرکز ثقل متوازی الاضلاع - محل تلاقی دو قطر آنست.

۸۶ - مرکز ثقل کثیرالاضلاع منتظم - مرکز آن است .

۸۷ - مرکز ثقل دایره - مرکز دایره است .

۸۸ - مرکز ثقل منکسر منتظم بطول l و شعاع دایره محیطی R و وتر منتهی C از این رابطه بدست میآید:

$$OG = \frac{R \cdot C}{l}$$

۸۹ - مرکز ثقل قوس دایره مقابل وتر AB از دایره ای بمرکز O و شعاع R از این رابطه بدست میآید :

$$GO = \frac{R \cdot AB}{AB \text{ قوس}}$$

۹۰ - مرکز ثقل بیضی - محل تلاقی دو قطر آنست .

۹۱ - مرکز ثقل قطاع دایره شعاع R و مرکز O

منطبق بر مرکز ثقل قوسی از دایره به شعاع R و $\frac{2}{3}$ و

بهمان مرکز O میباشد اگر α نصف زاویه مرکزی قطاع باشد :

$$OG = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

۹۲ - مرکز ثقل سطح نیمدایره بر روی شعاع عمود

بر قطر و بفاصله $OG = \frac{4R}{3\pi}$ از مرکز دایره قرار دارد.

۹۳ - مرکز ثقل متوازی السطوح نقطه تلاقی سه

قطر آنست .

۹۴- مرکز ثقل هرم و مخروط بر مرکز ثقل مقطع صفحه‌ای در آن که بفاصله $\frac{1}{4}$ ارتفاع از قاعده بموازات قاعده رسم شده باشد واقع است.

۹۵- مرکز ثقل هرم مثلث القاعده - روی خط واصل بین رأس و مرکز ثقل قاعده‌اش و بفاصله $\frac{3}{4}$ از رأس قرار دارد.

۹۶- مرکز ثقل منشور و استوانه - محل تقاطع خط واصل بین مراکز دو قاعده با مقطع متوسطش می‌باشد.

۹۷- مرکز ثقل منشور مثلث القاعده بروسط خط واصل بین مراکز ثقل دو قاعده‌اش قرار دارد.

۹۸- مرکز ثقل کره بر مرکز آن منطبق است.

۹۹- قضیه گولدن (Guldin) (۱) سطح حاصل از دوران يك خط مستقیم L از يك سطح معینی حول يك خط از همان سطح که L را قطع نکند مساویست با طول L ضرب در طول محیط دایره حاصل از دوران مرکز ثقل L .

(۲) حجم حاصل از دوران سطح S حول خطی از همان سطح مساویست با حاصلضرب S در طول محیط دایره حاصل از دوران مرکز ثقل S .

XXIV - شرط تعادل جسم صلب آزاد

۱۰۰- قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه آزادی صلب تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد آنست که مجموع

هندسی قوای مزبور صفر و منتهجه عزمهای آنها نسبت بهر نقطه صفر باشد.

۱۰۱ - بیان شرط تعادل بطریق تحلیلی - اگر

منتجه تصاویر قوای وارده بر جسم روی سه محور متعامد بترتیب X و Y و Z و تصاویر منتهجه عزم آنها بر سه محور L و M و N فرض شوند موقعی جسم بحال تعادل است که :

$$OG = 0 \cdot \begin{cases} L = 0 \\ M = 0 \\ N = 0 \end{cases} \quad \text{OR} = 0 \cdot \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

XXV - شرط تعادل جسم صلب غیر آزاد

۱۰۲ - شرط لازم و کافی برای آنکه جسم صلب غیر آزاد

تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد اینست که منتهجه قوای مستقیم و عکس العملهای جسم از یک طرف و عزم آنها نسبت بنقطه ثابتی از طرف دیگر مساوی صفر باشد.

۱۰۳ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه جسمی که

حول محوری ثابت بدون اصطکاک دوران مینماید در تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد اینست که عزم قوای وارده نسبت باین محور صفر باشد

۱۰۴ - قضیه - شرط لازم و کافی برای تعادل جسمی که

حول نقطه ثابت O حرکت بدون اصطکاک دارد اینست که منتهجه عزم قوای وارده نسبت باین نقطه صفر باشد.

۱۰۵ - قضیه - شرایط لازم و کافی برای تعادل جسمی

که در حین دوران حول محوری بر روی آن بلغزد اینست که

مجموع تصاویر قوای وارده بر این محور و همچنین عزمهای قوا نسبت بآن صفر باشد .

۱۰۶- کثیر الاضلاع اتکاء - از وصل نقاط اتکاء يك جسم بر يك سطح کثیر الاضلاعی بدست میآید موسوم به کثیر الاضلاع اتکاء .

۱۰۷- قضیه - شرط لازم و کافی برای تعادل جسم متکی بر سطح صیقلی آنست که منتهجه قوای وارده قائم بر سطح بوده و جسم را بر سطح متکی نماید و ضمناً داخل کثیر الاضلاع اتکا باشد .

XXVI - ماشینهای ساده

۱۰۸- تعریف - ماشینهای ساده دستگاههایی هستند که هر نقطه از آنها بر منحنی مشخص و ثابتی حرکت میکند و چون ارتباطات کاملی بین اجزاء مختلفه آنها هست با مشخص بودن وضع يك نقطه بر مسیرش میتوان اوضاع سایر نقاط دستگاه را معلوم ساخت .

۱۰۹- ماشینهای ساده واسطه بین دو نوع قوه میباشند یکی قدرت (قوای محرك) و دیگری مقاومت. دستگاه وقتی بحال تعادل است که قدرت و مقاومت دستگاهی معادل تشکیل دهند .

اهرمها

۱۱۰- تعریف - اهرم جسمی است که حول نقطه ثابتی موسوم بنقطه اتکاء میتواند حرکت کند. طول عمودهایی که از نقطه اتکاء بر امتداد قدرت یا مقاومت وارد شوند بازوی

قدرت یا مقاومت نام دارند .

۱۱۱ - شرط تعادل اهرم آنست که عزم قوای وارد بر آن نسبت بنقطه اتكاء صفر باشد . یعنی $P_a = R_b$ (P قدرت و R مقاومت و a و b طولهای بازوی قدرت و مقاومتند) یا عبارت دیگر قدرت و مقاومت دارای منتهای باشند که از نقطه اتكاء بگذرد .

۱۱۲ - فشار بر نقطه اتكاء منتهای دو قوه قدرت و مقاومت است یعنی :

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(P, Q)}$$

پس فشار وقتی ماکزیمم است که قدرت و مقاومت موازی باشند . در اینموقع فشار مذکور $P + Q$ خواهد بود .

۱۱۳ - انواع اهرم - اهرم بر سه نوع است :

۱ - اهرم نوع اول که در آن نقطه اتكاء بین قدرت و مقاومت واقع است . مانند ترازو و قیچی .

۲ - اهرم نوع دوم که در آن مقاومت بین قدرت و نقطه اتكاء است . مانند يك چرخه (چرخ رفتگران) و تلمبه .

۳ - اهرم نوع سوم که در آن قدرت بین مقاومت و نقطه اتكاء قرار دارد . مانند چرخ چاقوتیز کنی .

چرخ چاه

۱۱۴ - تعریف - چرخ چاه از استوانه دواری تشکیل شده

است موسوم به تنه چرخ و در طرفین آن دو استوانه کوچکتر که محورشان بر محور تنه چرخ منطبق است و بر پایه ثابتی

قرار دارند .

۱۱۵ - شرایط تعادل چرخ چاه آنست که اولاً قوای محرک و مقاوم چرخ را در دو جهت مخالف حرکت دهند ثانیاً مقدار آنها متناسب با نسبت عکس شعاع چرخ (یا طول دسته) و شعاع تنه باشد یعنی :

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \quad (P \text{ و } Q \text{ قوای محرک و مقاوم و } R \text{ و } r \text{ اشعه چرخ و تنه میباشد})$$

۱۱۶ - انواع چرخ چاه - چرخ چاه بر دو نوع است :

- ۱ - چرخ چاه معمولی که محور آن افقی است و چرخ محرك تبدیل بدسته خمیده ای شده که متصل باستوانه میشود .
- ۲ - چرخ چاه معدنی که چرخ محرك آن بزرگ و بشعاع تقریباً ۳۵ متر است و در کنار این چرخ نرده‌هایی است که اگر شخصی روی آنها حرکت کند وزن او چرخ را بحرکت درمی‌آورد و چرخ دوران میکند .

کریک یا جک (Cric)

۱۱۷ - تعریف - اسبابی است که برای بلند کردن بارهای سنگینی بارتفاع کم بکار میرود و آن عبارتست از یک محور قائم دندانه‌دار که بوسیله چرخ دندانه‌داری که حول محور افقی می‌گردد بالا و پائین میرود .

۱۱۸ - شرط تعادل جک : $\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \quad (P \text{ و } Q$

قدرت و مقاومت و R و r طول دسته گرداننده و شعاع چرخ دندانه دار است)

قرقره

۱۱۹ - تعریف - استوانه ایست فلزی یا چوبی که حول محور خود میتواند دوران کند بطرفین محور دوشاخه‌ای متصل است که اگر آنرا بوسیله قلابی بنقطه ثابتی بیاویزند قرقره را ثابت والا متحرك نامند.

۱۲۰ - شرط تعادل قرقره ثابت - شرط لازم و کافی برای تعادل آنست که مجموع عزم قوای p و Q نسبت بمحور قرقره صفر باشد (از اصطکاک صرف نظر میشود).

۱۲۱ - قرقره متحرك - در این نوع قرقره باری را که باید بلند نمایند بقلاب دوشاخه قرقره آویزان نموده و یک سر طنابی را که از روی قرقره و داخل دوشاخه میگذرد بنقطه ثابتی وصل نموده و قدرت را بر دیگر طناب وارد میآورند.

۱۲۲ - شرط تعادل در قرقره متحرك آنست که عزم قوای وارده نسبت به نقطه O (مرکز دایره قرقره) صفر باشد.

۱۲۳ - از اجتماع چند قرقره موفل (Moufle) تشکیل میشود. و اجتماع دو موفل هم نوع را پالان (Palan) مینامند. اگر P قدرت و R مقاومت و n عده قرقره ها فرض شود

$$P = \frac{R}{2^n} \quad \text{شرط تعادل پالان اینست که :}$$

آحاد مهم علمی که در ریاضیات متداول است

واحد ها	دستگاه C.G.S	دستگاه M.K.S
آحاد اصلی		
طول	سانتیمتر	متر
جرم	گرم	تن
زمان	ثانیه	ثانیه
آحاد مشتق		
سطح	سانتیمتر مربع	متر مربع
حجم	« مکعب »	« مکعب »
زاویه	رادیان	رادیان
قوه	Dyne	Sthène
کار و نیرو	Erg	کیلوژول
قدرت	ازک در ثانیه	وات
فشار	Bary	Pièze
مقدار حرارت	کالری کوچك	Thermie

توضیحات
<p>در دستگاه M.K.S یا دستگاه متری آحاد اصلی عبارتند از : متر (طول) ، ثانیه (زمان) و کیلو گرم (قوه)</p> <p>رادیان = قوسی از دایره مساوی طول شعاع آن دین = قوه ای که بجرم يك گرمی شتاب یکسان میدهد</p> <p>در ثانیه بدهد .</p> <p>استن = 10^8 دین</p> <p>ارگ = کاریك دین در يك سانتیمتر</p> <p>ژول = 10^7 ارگ</p> <p>وات = ژول در ثانیه</p> <p>پیز = 10^5 باری</p> <p>باری = دین بر سانتیمتر</p> <p>کالری کوچك = مقدار حرارتی که يك گرم آب را يك درجه گرمتر کند .</p> <p>کالری بزرگ = 1000 کالری کوچك</p> <p>ترمی = 10000 کالری بزرگ</p>

هیئت

I - کلیات

- ۱ - کره سماوی یا فلك کره موهومی است که مرکزش يك نقطه اختیاری از زمین و شعاعش نامحدود است و کواکب در سطح داخل آن قرار گرفته اند.
- ۲ - خط قائم هر نقطه عبارت از امتداد قوه ثقل در آن نقطه است که موازی امتداد شاغول میباشد (محور بدن هر شخص در روی زمین امتداد قائم را نشان میدهد).
- ۳ - سمت الرأس و سمت القدم نقاط تلاقی خط قائم هر نقطه اند با کره سماوی ، آنکه در بالاست سمت رأس و دیگری سمت قدم میباشد.
- ۴ - سطح قائم هر نقطه هر سطحی است که بر خط قائم بگذرد.
- ۵ - محور عالم خط موهومی است که کره سماوی بدور آن میگردد.
- ۶ - قطبین عالم دو نقطه برخورد محور عالم با کره سماوی هستند. آنکه در نیم کره شمالی است قطب شمال و دیگری قطب جنوب است (قطب شمال در حدود صورت فلکی بنام خرس کوچک (دب اصغر) و مجاورت ستاره جدی و قطب جنوب در حوالی صورت فلکی بنام صایب جنوبی واقعند).

۷- نصف النهار هر نقطه سطح قائمی است که بر محور عالم میگذرد.

۸- سطح افق هر نقطه سطحی است که از آن نقطه بر خط قائم همان نقطه عمود شود.

۹- استوای فلکی یا معدل النهار دایره عظیمه‌ای از کره سماویست که عمود بر محور عالم است.

۱۰- مدارات دوایر کوچکی از کره فلکی موازی معدل النهار میباشند.

۱۱- دائرة ساعتی یا نصف النهار هر کوکب دایره ایست که بر این کوکب و محور عالم میگذرد.

۱۲- زاویه ساعتی هر کوکب در هر لحظه قوسی است از معدل النهار محصور بین دایره ساعتی آن کوکب و نصف النهار مکان.

۱۳- حرکت یومی- هر کوکب در ۲۴ ساعت یکبار حول محور عالم میگذرد. چون کوکب ظاهراً بر سطح کره سماوی قرار دارند بنظر میرسد که کره سماوی در ۲۴ ساعت یکبار حول محور خود از مشرق بمغرب دورانی میکند. این حرکت ظاهری را حرکت یومی میگویند. مسیر هر کوکب بر یکی از مدارات است.

۱۴- دایرة البروج یا دایرة خسوف و کسوف دایره عظیمه ایست که زمین در یکسال حول آن خورشید میپیماید و سطح آن با معدل النهار زاویه $23^{\circ}27'5''$ تشکیل میدهد.

۱۵ - نقاط اعتدال عبارتند از دو نقطه تلاقی دایره البروج با معدل النهار. آنرا که زمین در موقع رفتن از نیمکره جنوبی به نیمکره شمالی از آن میگذرد نقطه اعتدال بهاری (ربیعی) میگویند و γ نام میگذارند، دیگری را که زمین در موقع رفتن از نیمکره شمالی به نیمکره جنوبی از آن میگذرد نقطه اعتدال پاییزی (خریفی) و γ' مینامند.

۱۶ - نقاط انقلاب دو نقطه از دایره البروجند که هر یک بفاصله ۹۰ درجه از نقاط اعتدال قرار دارند. آنکه در نیمکره شمالی است بنقطه انقلاب تابستانی یا صیفی و دیگری که در نیمکره جنوبی است بنقطه انقلاب زمستانی یا شتوی موسوم است.

۱۷ - جهت مستقیم و جهت معکوس - اگر شخصی بر محور عالم قرار گیرد و سر او متوجه شمال باشد هر حرکت که از طرف راست بچپ او انجام گیرد در جهت مستقیم است و در جهت دیگر، یعنی از چپ بر راست، در جهت معکوس.

۱۸ - قطر ظاهری هر کوکب بشعاع R که بفاصله d از ناظر واقع باشد زاویه α حادث بین اشعه بصری محدود بدو انتهای قطر کوکب میباشد.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{d} \quad \text{پس}$$

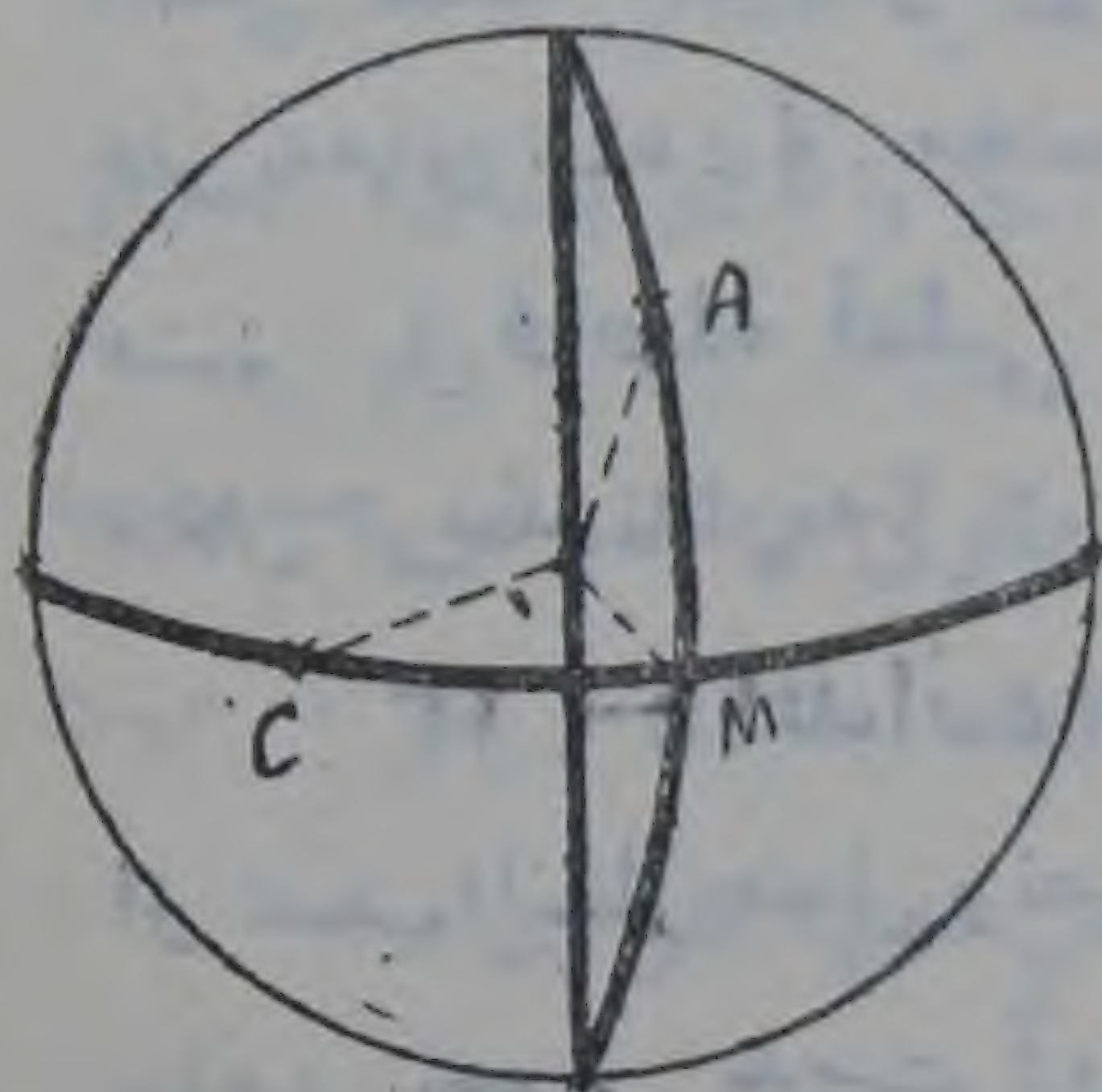
و چون قطر ظاهری بسیار کوچک است و جیب زاویه با خود

$$\alpha = 2 \frac{R}{d} \quad \text{آن مساویست :}$$

II - مختصات کروی

۱۹ - برای مشخص ساختن وضع يك نقطه A بر روی کره سماوی از مختصات کروی استفاده میشود .

در هر دستگاه مختصات کروی دایره عظیمه‌ای بنام صفحه اصلی در نظر گرفته میشود و در روی آن نقطه C را بنام مبدا اختیار مینمایند . آنگاه بر نقطه مفروض A و محور عمود بر صفحه اصلی دایره عظیمه



دیگری میگذرانند تا دایره اصلی را در M قطع کند . دو قوس AM و CM مختصات نقطه A هستند که اولی از 0° تا 90° در جهت مستقیم یا معکوس و دومی از 0° تا 90° در جهت مثبت یا منفی اندازه گرفته میشوند (ش ۱)

۲۰ - دستگاه مختصات افقی (مختصات سمتیه) :

سمت و ارتفاع -- صفحه اصلی صفحه افق و نقطه اصلی محل تلاقی افق با سطح قائم ثابتی بنام سطح قائم اصلی میباشد . مختص اول را سمت و مختص دوم را ارتفاع میگویند . سمت در جهت معکوس اندازه گرفته میشود .

گاهی بجای ارتفاع متمم آن که نام سمتی یا فاصله الراس نام دارد داده میشود . مختصات افقی بستگی بزمان و مکان ترصد دارند . حد اعلاى ارتفاع را اوج مینامند .

۲۱ - ارتفاع قطب - ارتفاع قطب از افق هر محل از روی دستور $(z + z') - 90 = h$ بدست می‌آید z و z' فواصل سمتی کوکب ابدی الظهوری در مواقع عبور علیا و سفلی از نصف النهار محل و h ارتفاع قطب است.

۲۲ - دستگاه مختصات استوائی (مختصات معدلی) : بعد و میل - سطح اصلی استوای فلکی و نقطه اصلی نقطه اعتدال بهاری و جهت مستقیم (مخالف حرکت عقربه‌های ساعت) . مختص اول را بعد و دوم را میل می‌گویند . متمام میل فاصله قطبی نام دارد . مختصات معدلی بستگی با مکان ترصد ندارند.

۲۳ - اندازه بعد - فاصله زمانی بین عبور کوکب از نصف النهار محل و نصف النهار مار بر نقطه اصلی را بوسیله ساعت نجومی بدست آورده و بقرار هر ۱۵ درجه در یک ساعت بعد کوکب را حساب می‌نمایند .

۲۴ - اندازه میل - اندازه جبری میل هر کوکب از روی دستور کلی : $D = h \pm z$ (با در نظر گرفتن جهت) بدست می‌آید D میل و h ارتفاع قطب و z فاصله الراس کوکب در موقع عبورش بنصف النهار میباشد.

۲۵ - تعیین فاصله قطبی کوکب در مکانی بعرض λ (شماره ۳۲) :

در نیمکره شمالی

۱- برای کوکب ابدی الظهوری (حول قطبی) $p < \lambda$

۲- کواکب رؤیت شوند (دارای طلوع و غروب): $\lambda < p < 180 - \lambda$

۳- « ابدی الخفاء » $180 - \lambda < p$

در نیمکره جنوبی

۱- برای کواکب ابدی الظهور (حول قطبی): $p < -\lambda$

۲- « رؤیت شوند (دارای طلوع و غروب): $-\lambda < p < 180 + \lambda$

۳- « ابدی الخفاء: $180 + \lambda < p$

(P فاصله قطبی کوکب در نیمکره شمالی از قطب شمال

و در نیمکره جنوبی از قطب جنوب است و λ در نیمکره جنوبی منفی است)

۲۶- دستگاه مختصات منطقی: طول و عرض - صفحه

اصلی: دایرة البروج و نقطه اصلی نقطه اعتدال ربیعی • جهت

مستقیم • مختص اول: طول، مختص دوم: عرض •

III - زمین

۲۷- شکل زمین - زمین بشکل کره ایست که در

قطبینش کمی فرو رفته باشد، نظیر حجمی که از دوران يك نیمه

بیضی حول محور اقصرش تولید شود • سطح آن نا صاف و

اطرافش راهوائی بقطر تقریباً صد کیلومتر احاطه نموده است.

۲۸- دوران زمین - زمین با حرکت متشابه حول

محور موهومی که از مرکز ثقلش میگذرد دوران میکنند این

محور بر محور عالم منطبق است •

۲۹- خط و سطح قائم و سطح نصف النهار و افق

(بشماره های ۲ و ۴ و ۷ و ۸ مراجعه شود).

۳۰ - خط نصف النهار - فصل مشترك سطح نصف -

النهار هر محل با سطح افق همان مکان را خط نصف النهار آن محل گویند. این خط تصویر محور عالم بر سطح افق محل است.

۳۱ - طول يك نقطه از سطح زمین - زاویه بین

نصف النهار محل و نصف النهار نقطه‌ای که مبداء فرض شده میباشد (نصف النهار گرینویچ یا پاریس را اغلب مبداء طولها میگیرند) اندازه آن از صفر تا 180° درجه شرقی یا غربی تغییر میکند (بر حسب فاصله زمانی بازااء هر ساعت 15° درجه محاسبه میشود).

۳۲ - عرض يك نقطه از سطح زمین - زاویه بین

قائم مکان (امتداد شعاع زمین در آن نقطه) با سطح استوا است و همچنین مساویست با ارتفاع قطب از افق آن محل (شماره ۲۱)

۳۳ - مدارات - مدارات زمین مکان هندسی نقاطی

از زمین میباشند که دارای يك عرض باشند.

۳۴ - استوای زمین - مداری است بعرض صفر.

۳۵ - قطبین زمین - دو نقطه از زمین بعرض 90°

میباشند.

۳۶ - شعاع r افق حسی - اگر R شعاع زمین و

h ارتفاع شخص ناظر از سطح زمین باشد مقدار r شعاع

افق حسی از روی دستور $r = \sqrt{2hR}$ بدست میآید.

۳۷ - انحنای افق - زاویه‌ای را که رأسش نقطه‌ای از فضا

(چشم ناظر که مقداری بالاتر از سطح زمین قرار گرفته باشد)
و دو ضلعش یکی مماس بر کره زمین و دیگری خط افقی باشد
زاویه انحنای افق گویند .

۳۸ - طول شعاع زمین از روی زاویه انحنای افق -

اگر R شعاع زمین و h ارتفاع ناظر و α زاویه انحنای افق

$$R = \frac{h \cos \alpha}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \text{باشد:}$$

(بازاء: متر $h = 300$ و $\alpha = 33'$ کیلومتر $R = 7000$ میشود)

۳۹ - ابعاد زمین - ربع محیط نصف النهار زمین

مساوی است با : 1868×1000 متر .

محیط استوائی زمین مساوی است با : 40075721 متر .

سطح کره زمین : 510065×10^4 کیلومتر مربع

حجم کره زمین : 1083205×10^6 کیلومتر مکعب .

شعاع کره ای که نصف النهارش مساوی نصف النهار زمین

باشد $= 6367387$ متر است .

شعاع کره ای که سطحش مساوی سطح زمین باشد =

6371003 متر است .

شعاع کره ای که حجمش مساوی حجم زمین باشد =

6370996 متر است .

شعاع استوائی زمین مساویست با : $a = 6378249$ متر

« قطبی » : $b = 6356515$ متر

$$\text{فرورفتگی قطبی} = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{2395} \text{ است}$$

۴۰ - اندازه شتاب ثقل زمین - در نقطه‌ای از زمین
بعرض 45° و هم سطح با دریا مساویست با 665 و 980 (در
دستگاه C.G.S)

۴۱ - وزن مخصوص زمین - در داخل زمین وزن
مخصوص 5 و نسبت با حجار واقع در سطح زمین 2.5 است -
۴۲ - سرعت حرکت انتقالی زمین در هر ثانیه 29
کیلومتر است .

۴۳ - مدت حرکت انتقالی زمین بدور شمس 365
روز و 5 دقیقه و 49 و 48 ثانیه است .

۴۴ - مختصات جغرافیائی تهران - طول تهران از
نصف النهار پاریس 7° و 5° و 49° و عرض تهران 35° و 41° و 35°
میباشد .

IV - نقشه های جغرافی

۴۵ - تعریف - نقشه های جغرافی عبارتند از صفحاتی
که تمام یا قطعه‌ای از سطح زمین را با قاعده مخصوص و مقیاس
معین بر روی آن تصویر نموده یا گسترده باشند .
برای ترسیم نقشه قبل از شبکه‌ای از نصف النهارات و مدارات
زمین را تهیه نموده و بعد محل هر نقطه را از روی طول و
عرضش بر روی آن معین مینمایند .

۴۶ - تصویر قائم هر نقطه بر یک صفحه موقع عمودی
است که از آن نقطه بر صفحه وارد شود . این صفحه را صفحه
تصویر نامند .

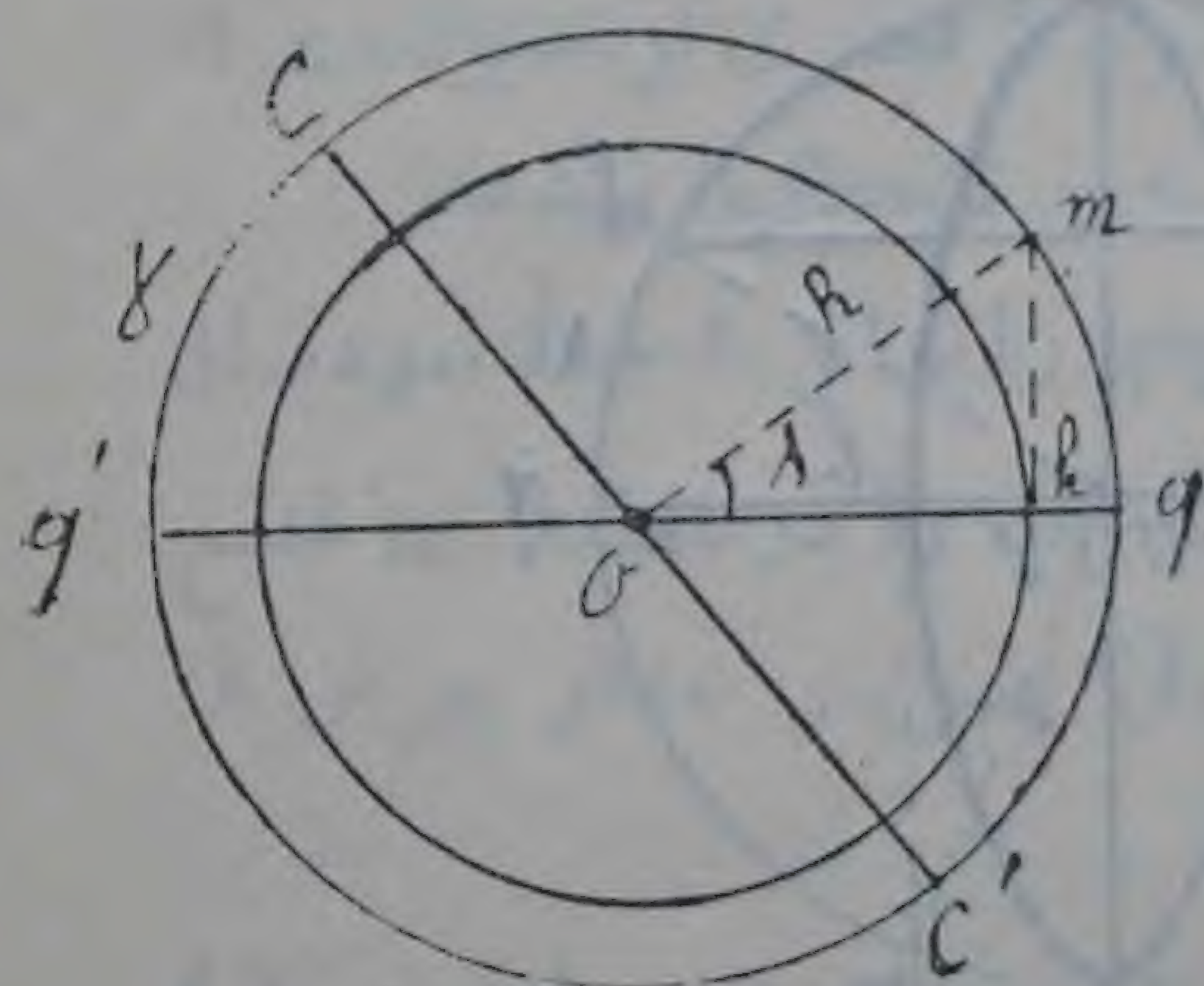
۴۷- رسم نقشه بطریق تصویر قائم :

۱- سطح تصویر استوا میباشد : تصویر

قطب بر مرکز استوا قرار دارد ، تصویر هر مدار بعرض λ دایره‌ایست متحدالمرکز با استوا و شعاع $r = R \cos \lambda$ ، تصویر هر نصف النهار بطول θ قطری از استوار است که با تصویر نصف النهار مبدأ زاویه θ تشکیل دهد .

طریقه رسم (۱-) برای رسم مداری بعرض λ از نقطه m

انتهای شعاع Om که با oq زاویه λ دارد عمود mh را بر qq' وارد مینمائیم ، دایره‌ای بر مرکز O و شعاع Oh تصویر مدار مفروض است (ش ۲) .



(۲) قوس Cq را

مساوی γ جدا مینمائیم
قطر CC' تصویر نصف
النهار بطول γ میباشد
(ش ۲) .

(۲) سطح تصویر

یکی از سطوح نصف النهار است : (ش ۲)

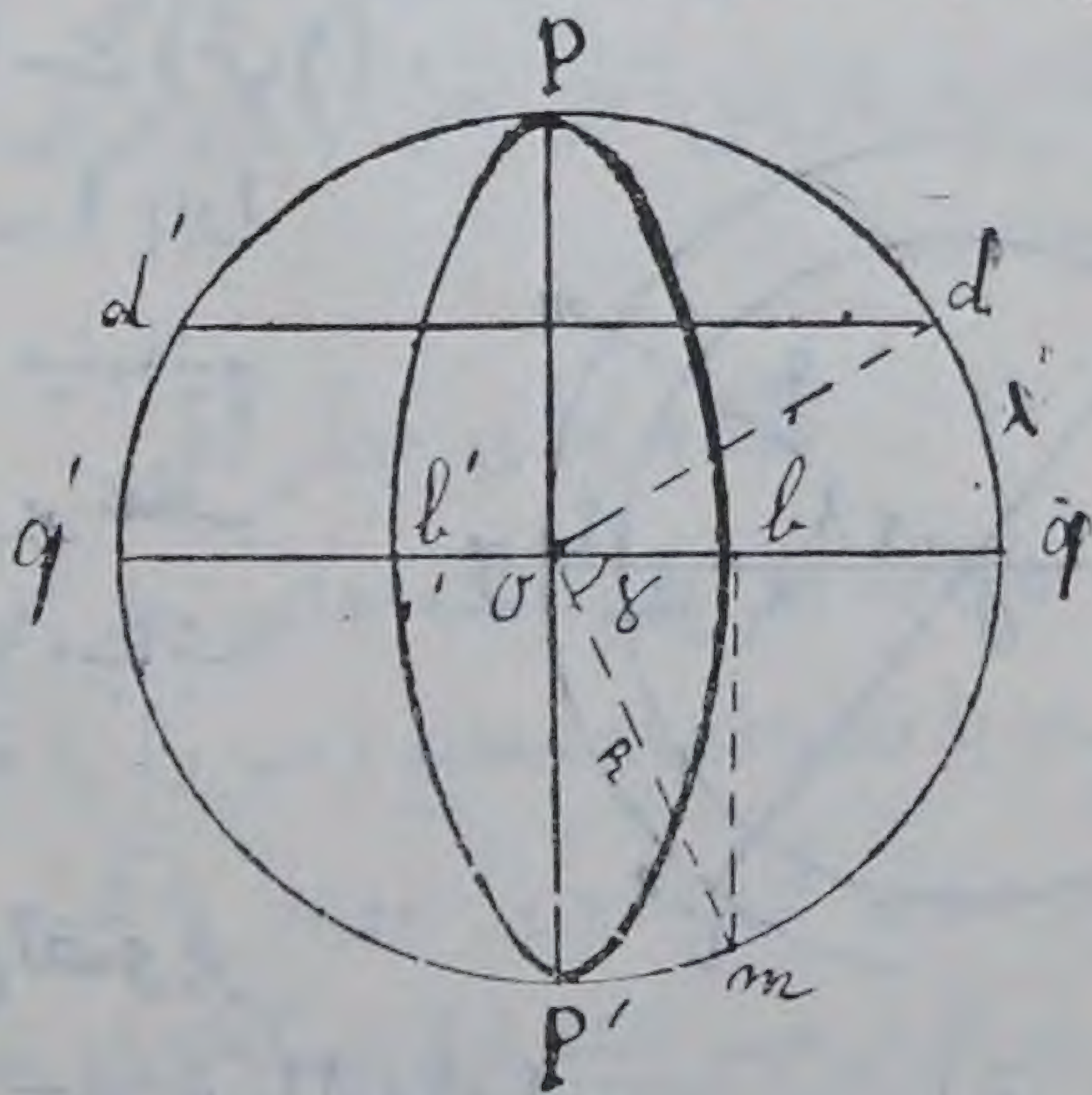
تصویر مدارات و استوا خطوط فصل مشترك آنها با سطح تصویر است .

تصویر مداری بعرض λ وتری است موازی استوا که فاصله‌اش از آن روی محیط دایره نصف النهار تصویر λ درجه است ؛ تصویر هر نصف النهار بطول γ یک بیضی است که محور

اطولش خط قطبین و محور اقصرش بطول $bb^- = 2R \cos \gamma$ میباشد.

طریقه رسم ۱) برای رسم مداری بعرض λ قوس qd را مساوی λ جدا مینمائیم وتر dd^- که موازی qq^- است تصویر مدار مفروض میباشد.

۲) از نقطه m انتهای شعاع Om که با Oq زاویه γ میسازد عمود mb را بر qq^- وارد میکنیم و بر سه نقطه P و b و P^- يك نیمه بیضی و بر P^- و b^- ، قرینه b نسبت به O ، نیمه بیضی دیگری میگذرانیم بیضی PbP^-b^- تصویر نصف النهار بطول γ میباشد (ش ۳).



خواص و مورد استعمال - در تصویر قائم نواحی

حول مرکز نقشه نزدیک بحقیقت تصویر میشوند و هرچه از مرکز نقشه دورتر شویم دقت نقشه کمتر میشود. طریقه تصویر قائم را بیشتر برای تهیه نقشه نواحی قطب زمین و صور قطبی آسمان و همچنین تصویر ماه و آفتاب و کرات دور بکار میبرند.

۴۸- تصویر مرکزی (استروگرافیک)

۱- تعریف - بشماره ۳۰۵ و ۳۰۶ قسمت هندسه

مراجعه شود.

۲- در تصویر مرکزی زوایا بمقدار حقیقی تصویر میشوند.

۳- تصویر مرکزی هر دایره دایره است.

رسم نقشه بطریق تصویر مرکزی

۱- پرده سطح استوا است و مرکز تصویر یا نقطه

دید یکی از قطبین میباشد، تصویر مداری بعرض λ دایره ایست

$$r = R \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\lambda}{2} \right)$$

تصویر هر نصف النهار بطول γ قطری از استوا است که

با تصویر نصف النهار مبداء زاویه γ تشکیل میدهد.

طریقه رسم - ۱) قوس qm را برابر λ جدا نموده از

نقطه دید V به m وصل میکنیم تا qq را در نقطه m^- قطع

کند دایره بمرکز O و شعاع Om^- تصویر مدار بعرض λ میباشد.

۲) قوس qC^- را مساوی γ جدا مینمائیم قطر CC^-

تصویر نصف النهار بطول γ میباشد (ش ۴).

۳- پرده یکی از سطوح نصف النهار است و نقطه

دید انتهای قطری از استوا که عمود بر پرده است میباشد.

تصویر هر نیمه مدار بعرض λ قوس دایره ایست که مرکز

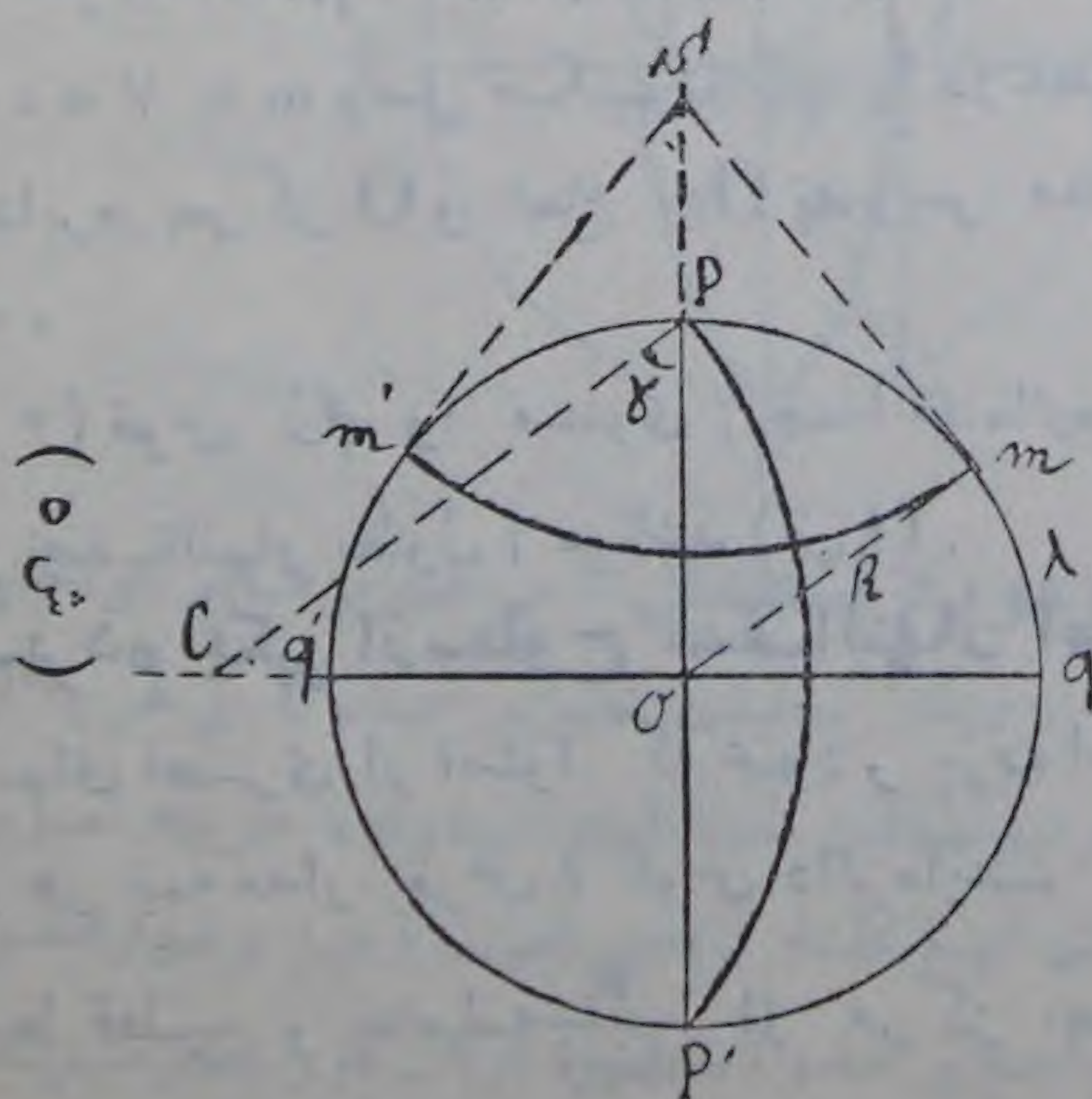
بر خط قطبین و بفاصله $\frac{R}{\sin \lambda}$ از مرکز نصف النهار

تصویر قرار دارد؛ تصویر هر
نصف النهار بطول γ قوس
دائره ایست مار بر دو قطب که
مرکزش بر قطر عمود بر خط
قطبین و بفاصله $Rtg\gamma$ از مرکز
سطح نصف النهار تصویر قرار
دارد.

طریقه رسم ۱) قوس

mq را مساوی γ جدا نموده

مماس Sm قطر PP' را در S قطع مینماید بمرکز S و شعاع
 Sm دایره ای رسم مینمائیم قوس mm' از این دایره تصویر نیمه
مدار بعرض γ میباشد. ۲) از P خط PC را چنان رسم میکنیم
که با PP' زاویه γ بسازد، بمرکز C نقطه تلاقی این خط با
 q' و شعاع CP دایره ای رسم میکنیم قوس PP' از این دایره
تصویر نیمه نصف النهار بطول γ میباشد (ش ۵).



خواص و مورد استعمال - در تصویر مرکزی چون

زوايا تغییر نمیکنند تصویر مشابه شکل اصلی هستند و ضمناً هر چه از مرکز محیط نقشه نزدیکتر شویم تصویر بحقیقت نزدیکتر میشود. طریقه تصویر مرکزی را برای تهیه نقشه های مسطحه نیمکره زمین و نقشه های ممالك بکار میبرند.

۴۹ - تهیه نقشه بطریق گسترش استوائی - استوانه

مستدیر قائمی بر یک کره مصنوعی زمین که بمقیاس معین تهیه شده محیط مینمائیم بطوریکه دو قاعده اش بر قطبین کره مماس شوند بعد فصل مشترکهای سطوح نصف النهارات و مدارات را با سطح جانبی استوانه بدست میآوریم و استوانه را روی یک صفحه میگسترانیم، شبکه ای بدست میآید که در آن نصف النهارات و مدارات بترتیب بخطوط قائم و افقی نموده شده اند. در این گسترش ناحیه استوائی نزدیک بحقیقت نموده شده و هر چه بقطب نزدیکتر شویم فواصل مدارات ودقت نقشه کمتر میشود.

۵۰ - تهیه نقشه بوسیله گسترش مخروطی - مخروط

قائمی محاذی مدار متوسط ناحیه کوچکی که میخواهند نقشه آنجا را تهیه کنند بر کره محیط مینمایند بطوریکه فصل مشترك هر نصف النهار با سطح جانبی مخروط بر یکی از مولد های آن منطبق گردد. فصل مشترك سطح مدارات را نیز با سطح جانبی مخروط بدست آورده و مخروط را بر صفحه ای میگسترانند؛ شبکه نقشه ای بدست میآید که در آن نصف النهارات

بنخروط متقاطع در يك نقطه (راس مخروط) و مدارات به دوائر متحدالمرکزی بمرکز راس مخروط نموده شده اند .
این نقشه برای ناحیه کوچکی از کره که در طرفین مدار متوسط آن واقع شده است قابل استفاده میباشد .

V - خورشید

۵۱ - مدار خورشید - خورشید در جهت مستقیم بدور زمین (بفرض ثابت بودن) مداری بیضی شکل میپیماید که زمین در یکی از کانونهای آن قرار گرفته و خروج از مرکز این بیضی تقریباً $e = \frac{1}{60}$ میباشد .

۵۲ - میل دایرة البروج - زاویه بین دایرة البروج و استوای فلکی مساوی 23° و 37° میباشد .

۵۳ - قطر ظاهری خورشید - قطر ظاهری متوسط خورشید $31'59''$ و $32'$ یا با تقریباً $32'$ میباشد بزرگترین مقدار قطر ظاهری در دیماه (اول ژانویه $35'$ و $32'$ و کوچکترین مقدار آن در تیرماه (اول ژوئیه) $31'$ ، $32''$ است .

۵۴ - اختلاف منظر افقی شمس 8° و $8'$ میباشد

۵۵ - شعاع خورشید - صد برابر شعاع زمین و مساوی 695000 کیلومتر است

۵۶ - وزن مخصوص آن نسبت بآب $1/4$ و نسبت بزمین $1/256$ است

۵۷ - جرم خورشید 333432 برابر جرم زمین است .

۵۸ - حجم خورشید - 1301200 برابر حجم زمین است .

۵۹ - سنگینی هر جسم در روی استوای خورشید تقریباً ۲۸ برابر سنگینی آن جسم در روی استوای زمین است .
 ۶۰ - خورشید در مدت ۳۳ روز و ۴ ساعت و ۲۹ دقیقه یکمرتبه بدور خود میگردد .

۶۱ - فاصله متوسط زمین از خورشید ۳۳۴۴۰ کیلو متر یا ۱۴۹۵۰۱۰۰۰ کیلو متر است .
 شعاع زمین یا ۱۵۰۰۰۰۰۰ کیلو متر است .

۹۲ - تقدیم دو نقطه اعتدال - نقطه اعتدال بهاری هر سال تقریباً ۲۶ ر ۵۰ در جهت مخالف (بر خلاف توالی بروج) عقب می رود . یعنی در ۲۶۰۰۰ سال یک دور معدل النهار را طی میکند .

۶۳ - تعیین دو نقطه اعتدال - اگر a و d بعد و میل خورشید در ظهر روز قبل از نوروز (نوروز روزیست که خورشید بنقطه اعتدال بهاری γ میگذرد) و a' و d' بعد و میل آن در ظهر روز بعد از نوروز باشند و x بعد نقطه γ باشد :

$$x = \frac{ad' + da'}{d + d'}$$

بعد نقطه اعتدال پائیزی (خریفی) γ' نیز بکمک همین دستور حساب میشود .

پس از محاسبه معلوم میشود که اختلاف این دو بعد ۱۸۰ درجه است (مبداء بعد اختیاری است)

۶۴ - تعیین ساعت عبور شمس بنقطه اعتدال بهاری - اگر t زمان بین ظهر روز قبل از نوروز و ظهر روز بعد از

نوروز و d و d' میل شمس در این دو موقع و T زمان بین ظهر روز قبل از نوروز تا موقع عبور شمس به نقطه γ باشد.

$$T = \frac{dt}{d+d'}$$

۶۵ - ساختمان آفتاب - اگر از مرکز به سمت محیط برویم

از طبقات زیر به ترتیب عبور خواهیم کرد :

۱ - هسته مرکزی سیال با درجه حرارت بی اندازه زیاد؛

۲ - یک سطح درخشان موسوم به فوتوسفر یا کره نور که

از گازهای محترقه تشکیل شده و نوری که بنظر ما میرسد از این طبقه است و کلف های خورشید نیز لکه های سیاهی هستند که در این طبقه جا دارند ؛

۳ - یک اتمسفر بخار موسوم به طبقه تابان که طیف شمسی

از آن حاصل میشود ؛

۴ - یک اتمسفر قرمز رنگ موسوم به کرو موسفر یا کره

رنگین که مخصوصاً از هیدروژن تشکیل یافته ؛

۵ - یک طبقه شفاف و سفید رنگ که در موقع کسوف به

شکل طوق سفید دیده میشود .

VI - زمان و تقویم

۶۶ - زمان نجومی H بین طلوع و غروب کوکبی که

فاصله قطبیش P باشد در مکانی بعرض λ عبارتست از :

$$\cos H = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} P}$$

مرکز ستاره‌ای از نصف النهار معین و طول آن ۲۳ ساعت و

• ۵۶ دقیقه است

دو عبور متوالی خورشید از نصف النهار معین •

بر روی دایرة البروج ثابت نمیباشد •

البروج را در مصاحبت خورشید حقیقی با سرعت ثابتی

• بيماید

مجازی است بر نصف النهار معین *

۷۱- ساعت نجومی $\frac{1}{24}$ روز نجومی و ساعت شمسی

$\frac{1}{24}$ روز شمسی حقیقی وساعت رسمی $\frac{1}{24}$ روز شمسی

• متوسط است

متوالی خورشید بر نقطه اعتدال بهاریست و عبارتست از:

۵۵ر ۴۷ ثانیہ ۴۸ دقیقہ ۵ ساعت ۳۶۵ روز = ۲۴۲۱۹۸۷۹ر ۳۶۵ روز

از مبدأ نقطه اعتدال بهاری 360° درجه افزوده شود، یا زمان بین

دو عبور متوالی شمس بنصف النهار کو کبی است ثابت و عبارتست از:

۵ر۹ ثانیه ۹ دقیقه ۶ ساعت ۳۶۵ روز

۷۴ - فصول - فواصل زمان بین عبور خورشید از نقاط

اعتدال و انقلاب را چهار فصل مینامند.

بهار بین نقطه اعتدال بهاری تا انقلاب تابستانی :

۲۱ ساعت ۹۲ روز

تابستان « « انقلاب تابستانی تا اعتدال پاییزی :

۱۴ ساعت ۹۳ روز

پائیز « « اعتدال پاییزی تا انقلاب زمستانی :

۱۹ ساعت ۸۹ روز

زمستان « « انقلاب زمستانی تا اعتدال بهاری :

۱ ساعت ۸۹ روز

۷۵ - معادله زمان - معادله زمان عبارتست از

$t_m - t_v$ یعنی تفاضل بین زمان متوسط و زمان حقیقی در

يك مكان معين و برای خواندن ساعت آفتابی دانستن آن حتماً لازم است و تغییرات آنرا جدول زیر نشان میدهد :

تاریخ	اول ژانویه	۱۱ فوریه	۱۶ آوریل	۱۴ مه	۱۴ ژوئن
$t_m - t_v$	دقیقه ۴	ثانیه دقیقه ۱۴ ۲۶	ثانیه دقیقه ۳ ۵۲	ثانیه دقیقه ۰	ثانیه دقیقه ۰
تاریخ	۲۶ ژوئیه	۱ سپتامبر	۳ نوامبر	۲۴ دسامبر	اول ژانویه
$t_m - t_v$	ثانیه دقیقه ۱۸ ۶	ثانیه دقیقه ۰	ثانیه دقیقه -۱۶ ۲۰	ثانیه دقیقه ۰	دقیقه ۴

تقویم

۷۶ - سال مداری عبارتست از فاصله دو عبور متوالی خورشید از نقطه اعتدال ربیعی .

۷۷ - سال رسمی سالی است مرکب از عدد صحیحی از ایام که در حد اعلاى امکان با سال اعتدالی تطبیق نماید .

۷۸ - تقویم قاعده ایست که برای تطبیق سالهای رسمی با سالهای مداری وضع میگردد .

تقویم در نزد ملل مختلف مبانی مختلف داشته و دارد که مهمترین آنها عبارتند از تقویم مصری ، قیصری ، گرگوارى و تقویم جلالی (فارسی) .

۷۹ - **تقویم مصری** - مصریان سال رسمی را ۳۶۵ روز میگرفتند ، پس در هر سال در حدود شش ساعت عقب میافتادند بطوریکه در هر سیصد و شصت و پنج سال ۳ ماه در تعیین فصول اختلاف حاصل میشد و هر فصل جای خود را بفصل دیگر میداده پس برای اینکه اول بهار رسمی بعد از يك دوره مجدداً باول بهار واقعی منطبق گردد باید ۱۴۶۰ سال بگذرد این دوره ۱۴۶۰ ساله را دوره سوتياك میگفتند .

تقویم قیصری - رومیان نخست سال را ۳۶۴ روز و بعد مانند مصریان ۳۶۵ روز میگرفتند ولی برای جلوگیری از بی نظمی تاریخ مصری هر چندین سال یکبار چند روز بسال رسمی خود میافزودند تا با سال مداری تطبیق کنند .

در ۴۴ سال پیش از میلاد ژول سزار قیصر روم بدستکاری

سوزیژن منجم تصمیم باصلاح تقویم گرفت و هر سه سال را ۳۶۵ روز و سه سال چهارم (کبیسه) را ۳۶۶ روز مقرر داشت.

تقویم گرگوارى - اصلاح قیصرى برای تطبیق سال

رسمی با سال مداری کافی نبود و سال رسمی باندازه $\frac{3}{400}$

روز از سال مداری درازتر بود. پاپ گرگوار هشتم بکمال منجم معروف لیلیو بسال ۱۵۸۲ مقرر داشت که ده روز اختلافی را که از موقع اصلاح قیصری بوجود آمده بود اصلاح کنند و روز ۱۴ اکتبر ۱۵۸۲ را ۱۵ اکتبر بدانند و از آن پس در هر چهار صد سال سه سال کبیسه را غیر کبیسه محسوب نمایند.

اکنون در تاریخ مسیحی سالهائی که دو رقم آخرشان به ۴ قابل قسمت است کبیسه اند مگر آنها که بدو صفر ختم میشوند و سده های آنها بر چهار قابل قسمت نیستند (مانند ۱۹۰۰)

۸۲ - تقویم جلالی - تعدیل گرگواریهم اختلاف

بین سالهای رسمی و مداری را کاملاً از بین نمیبرد یعنی در هر دو هزار سال یکروز اختلاف پیدا میشود.

بهترین تعدیلی که تاکنون در تقویم شده است بوسیله عمر خیام و جمعی دیگر مانند عبدالرحمن خازنی در سال ۴۷۱ هجری انجام شده است و اختلاف بین سالهای رسمی و مداری در هر شش هزار سال یکروز است.

در این تقویم در هر دوره سی و سه ساله هشت سال کبیسه و ۲۵ سال غیر کبیسه است باین ترتیب که از آغاز دوره هر سه

سال غیر کبیسه و سال چهارم کبیسه است و در آخر دوره چهار سال غیر کبیسه میباشد.

آغاز دوره سی و سه ساله‌ای که فعلاً در آن هستیم سال ۱۳۱۰ بوده است. در این دوره سالهای ۱۳۱۳-۱۷-۲۱-۲۵-۲۹-۳۳-۳۷-۴۲ کبیسه میباشند.

۸۳ - تقویم قمری - سال عادی قمری ۳۵۴ روز و در سال های کبیسه ۳۵۵ روز است و مشتمل بر ۱۲ ماه ۲۹ روزه یا ۳۰ روزه است.

ماه قمری با دیدن هلال ماه مشخص میگردد ولی برای آنکه وضع ثابتی داشته باشند معمولاً یکماه بیست و نه روزه و ماه دیگر ۳۰ روزه حساب میشود.

در هر دوره سی ساله یازده سال کبیسه است که عبارتند از سالهای ۲ و ۵ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ و ۱۶ و ۱۸ و ۲۱ و ۲۴ و ۲۶ و ۲۹.

VII - ماه

۸۴ - مدار ماه - قمر بدور زمین مدار بیضی شکلی در جهت مستقیم می پیماید که زمین در یکی از کانونهایش قرار گرفته و میل متوسطش نسبت بدایرة البروج ۴۳° ، $۸'$ ، ۵° است و این میل در مدت ۱۷۳ روز بین ۵° و $(۱۸'$ و $۵^{\circ})$ تغییر میکند.

خروج از مرکز این بیضی تقریباً $e = \frac{1}{18} = ۰.۰۵۴۹$ میباشد.

۸۵ - دوره نجومی (ماه نجومی) - زمان نیست

محصور بین دو مقارنه متوالی **قمر** با يك ستاره ثابت و مدتش ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۱۱٫۵ ثانیه است .

۸۶ - دوره اعتدالی (ماه اعتدالی) - زمان نیست بین دو مقارنه قمر با نقطه اعتدال ربیعی و یا زمان بین دو مرور متوالی قمر بیک نصف النهار سماوی و مدتش ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۷٫۴ ثانیه است .

۸۷ - دوره هلالی (ماه قمری) - زمان نیست محصور بین دو مقارنه قمر یا شمس و یا بازگشت قمر یا شمس بر هر يك از نصف النهارات و مدت متوسط آن ۲۹ روز و ۱۲ ساعت و ۴۴ دقیقه و ۲٫۹ ثانیه است .

۸۸ - فاصله متوسط ماه از زمین - مساوی ۲۵٫۶۰ برابر شعاع استوائی زمین یا ۳۸۴۴۰۰ کیلومتر است این مقدار مربوط است باختلاف منظر ماه وقتی که $۵۷^{\circ}۲'$ باشد .

۸۹ - قطر ظاهری متوسط ماه - $۴۷^{\circ}۳'$ و ۳۱° و بزرگترین مقدار آن تقریباً $۵۰''$ و $۳۳'$ و کوچکترین مقدارش تقریباً $۲۲'$ و $۲۸'$ میباشد .

۹۰ - اختلاف منظر افقی ماه $۲^{\circ}۷'$ و $۵۷'$ است .

۹۱ - شعاع ماه $۰/۲۷۳$ یا $\frac{۳}{۱۱}$ شعاع استوائی زمین

یا ۱۷۳۷ کیلومتر است .

۹۲ - وزن مخصوص آن نسبت به آب $۳/۳۳$ و نسبت به

زمین $۰/۶۰۶$ است .

۹۳ - جرم ماه - 0.0123 ر یا $\frac{1}{81}$ جرم زمین

است .

۹۴ - حجم ماه - $\frac{1}{50}$ حجم زمین میباشد .

۹۵ - سطح ماه - قریب $\frac{1}{13}$ سطح زمین میباشد

۹۶ - وزن اجسام در استوای ماه 166 ر برابر وزن

اجسام در استوای زمین است .

۹۷ - حرکت وضعی ماه - قمر در مدتی مساوی

دوره نجومی یا یکماه نجومی یعنی 27 روز و 7 ساعت و 43 دقیقه و 11 ر ثانیه بدور خود میگردد .

۹۸ - قسمتی از ماه که قابل رویت میباشد $\frac{59}{100}$ سطح

کل آن میباشد .

۹۹ - عقدتین - نقاط تلاقی مدار ماه با دایرة البروج

بنام عقدتین موسوم است یکی عقده رأس و دیگری عقده ذنب .

قمر پس از عبور از عقده رأس شمالی و پس از عبور از عقده ذنب

جنوبی میگردد عقده رأس روزی 63 ر 10 و 3 روی دایرة البروج

عقب میرود یعنی در مدت 6793 روز یا تقریباً 18 سال و

$\frac{2}{3}$ سال یکدور دایرة البروج را طی مینماید .

VIII - خسوف و گسوف

۱۰۰ - خسوف - (گرفتن ماه) - ۱ - فاصله \triangle رأس

منحرو طظل زمین حاصل از تابش آفتاب بر آن از مرکز زمین
بفرض اینکه r شعاع زمین و d قطر ظاهری آفتاب و p اختلاف
منظر آن باشد عبارتست از :

$$\Delta = \frac{r}{\sin \frac{d}{2} - \sin P}$$

میتوان در این فورمول بجای جیب زاویه های کوچک $۱۶'۲''$ $\frac{d}{2}$
و $P = ۸۰'۸''$ مقدار این زوایا را بر حسب رادیان گذاشت
در این صورت چنین بدست میآید :

$$\Delta = \frac{r \times ۲۰۶۲۶۵}{۹۶۲ - ۸۰۸} = ۲۱۶ r$$

۲- بفرض اینکه λ عرض ماه در لحظه مفروض و d قطر
ظاهری آفتاب و d' قطر ظاهری ماه و P اختلاف منظر
خورشید و P' اختلاف منظر ماه باشد :

برای اینکه خسوف کلی دست دهد بایستی در موقع مقارنه

$$\lambda < P + P' - \frac{d + d'}{2}$$

برای اینکه خسوف جزئی دست دهد :

$$P + P' - \frac{d + d'}{2} < \lambda < P + P' - \frac{d - d'}{2}$$

عبارت $P + P' - \frac{d + d'}{2}$ بین $(۲۰'۵۹'')$ و $(۳۱'۳۰'')$

و عبارت $P + P' - \frac{d - d'}{2}$ بین $(۵۲'۲۹'')$ و $(۹۲'۴۰'')$

تغییر میکند .

۱۰۱- کسوف - (گرفتن خورشید) - ۱- فاصله Δ'

راس مخروط ظل ماه حاصل از تابش آفتاب بر آن از مرکز ماه
فرض اینکه r شعاع زمین و d قطر ظاهری خورشید و P
اختلاف منظر آن و d' قطر ظاهری ماه باشند عبارتست از:

$$\Delta' = \frac{r \sin \frac{d'}{2}}{\sin \frac{d}{2} \sin P}$$

میتوان در این فورمول بجای سینوس زاویه کوچک

$\frac{d}{2} = ۱۶'۲''$ مقدار آنرا بر حسب رادیان قرار داد لذا با

توجه باینکه نسبت $\frac{\sin \frac{d'}{2}}{\sin P}$ همان نسبت شعاع ماه بشعاع زمین

یعنی $\frac{۳}{۱۱}$ میباشد مقدار Δ' بصورت زیر درمیآید :

$$\Delta' = r \times \frac{۳}{۱۱} \times \frac{۲۰۶۲۶۵}{۹۶۲} = ۵۹r$$

۲- فرض اینکه λ عرض قمر در لحظه مفروض و d قطر
ظاهری آفتاب و d' قطر ظاهری ماه و P اختلاف منظر آفتاب
و P' اختلاف منظر ماه باشد .

برای اینکه کسوف در بعضی از نقاط زمین دیده شود
ستی در موقع مقارنه داشته باشیم

$$\lambda < P' - P + \frac{d + d'}{2}$$

برای اینکه کسوف کلی یا حلقوی در بعضی از نقاط زمین دیده شود بایستی داشته باشیم ،

$$\lambda < p' - P + \frac{d - d'}{2}$$

عبارت $P' - P + \frac{d + d'}{2}$ بین $(۱^\circ \text{ و } ۲۴')$ و $(۱^\circ \text{ و } ۳۴')$

و عبارت $P' - P + \frac{d - d'}{2}$ بین $۵۳'$ و $۶۳'$ تغییر میکند .

IX - قوانین هیئت

۱۰۲ - قوانین کیلر - قانون اول - سیارات حول آفتاب

در جهت مستقیم بیضی هائی نزدیک بدایره میپیماید که خورشید در یکی از دم کانون آن قرار دارد .

قانون دوم - مساحتی که شعاع حامل هر سیاره (خط و اصل بین خورشید و سیاره) در زمانهای متساوی میپیماید معادل میباشند .

قانون سوم - مجنورات زمانهایی که سیارات صرف پیمودن مداراتشان میکنند متناسب اند بامکعبات محور اطول مداراتشان یعنی اگر t و t' زمانهای دوره نجومی و d و d' بترتیب طول محور های اطول مدارات دو سیاره باشند:

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{d^3}{d'^3}$$

۱۰۳ - قانون نیوتن - (قانون جاذبه عمومی) - هر گاه

دو ستاره بر طبق قوانین کیلر بدور یکدیگر گردش کنند بنسبت

مستقیم جرمشان و بنسبت عکس مجذور فاصله‌شان یکدیگر را جذب می‌کنند یعنی اگر m و m' اجرام و d فاصله دو کوکب باشند F نیروی جذب آنها نسبت به یکدیگر عبارتست از ،

$$F = \frac{mm'}{d^2} \times K$$

K ضریبی است ثابت و عبارتست از قوه جاذبه ایکه واحد جرم بر واحد جرم در واحد فاصله وارد آورد و مقدارش در دستگاه

G.C.S عبارتست از $\left(\frac{1}{3862}\right)^2$ دین (قانون فوق کلی است و بین هر دو جسم ثابت و برقرار می‌باشد.)

X - سیارات

۱۰۴ - سیارات عمده در دستگاه منظومه شمسی بترتیب

از نزدیکترین آنها بخورشید عبارتند از :

۱- عطارد ۲- زهره ۳- زمین ۴- مریخ ۵- مشتری

۶- زحل ۷- اورانوس ۸- نپتون

بین مریخ و مشتری دسته سیارات کوچک قرار گرفته‌اند

۱۰۵ - قانون بد - اعداد ۰، ۳، ۶، ۱۲، ۲۴، ۴۸، ۹۶ را

که از دومی بی‌بعد هریک دو برابر عدد ماقبل است نوشته و بعد

به‌ریک ۴ واحد میافزائیم تا حاصل شود ۴، ۷، ۱۰، ۱۶، ۲۸، ۵۲

۱۰۰ بعد هریک از آنها را بر ۱۰ قسمت می‌کنیم حاصل می‌شود

۰٫۴ و ۰٫۷ و ۱ و ۱٫۶ و ۲٫۸ و ۲٫۲ و ۵ و ۱۰ این اعداد بترتیب نسبت

فواصل سیارات را از خورشید بفاصله زمین از آن با تقریب کمی

نشان می‌دهند .

در تدوین این کتاب

از کتابهای ذیل استفاده شده است

نام کتاب	نام نویسنده
۱- التفهیم	ابو ریحان محمد بیرونی
۲- جبر	دکتر محمود مهران
۳- مکانیک	دکتر محمود مهران - محسن هنر بخش
۴- هیئت	آقای رضا نجمی (مهندس الملك)
۵- حساب	مرحوم غلامحسین رهنما
۶- خلاصه حساب	E. Jacquet
۷- جبر	F.G.M.
۸- جبر و مثلثات	H. commissaire
۹- خلاصه جبر	E. Jacquet
۱۰- مثلثات	H. Ferval
۱۱- مثلثات	Carlo Bourlet
۱۲- مکانیک	Réunion des professeurs
۱۳- خلاصه مکانیک	E. Jacquet
۱۴- هندسه	F.G.M.
۱۵- هندسه	H. commissaire
۱۶- هیئت	» »
۱۷- خلاصه هیئت	E. Jacquet
۱۸- هیئت	Réunion des professeurs
۱۹- فورمولار	E. Weille t H. Sebban
۲۰- فورمولار مکانیک	T. Caronnet

غلطنامه

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۵	۱۰	پاید	پایه
۵	۱۷	an	a^n
۵	۲۰	$(ab)^m$	$(ab)^m$
۱۷	۱۷	دوره	دوری
۱۸	۱۲	بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{d}$ همچنین بین	
		$\frac{a}{c}$ و $\frac{c}{a}$ شود	
۱۸	۱۳	بین $\frac{a}{a-b}$ و $\frac{c}{c+d}$ گذاشته شود	
۲۰	۴	$n\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdots l}$	$n\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdots l}$
۳۴	۱	۴۹۵۰۰۰۰۰۰	۴۹۵۰۰۰۰۰۰۰
۳۴	۲	۴۹۵	۰۹۵
۳۴	۱۱	باقیما،	باقیمانده
۳۸	۴	$\frac{\sqrt{b}}{b}$	$\frac{a\sqrt{b}}{b}$
۴۳	سطر آخر	= مقابل خط کسری قرار گیرد	

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۴۴	۲	$o \sqrt{a^p}$	$q \sqrt{a^p}$
۴۴	سوم از آخر	$a = \frac{1}{m+m'}$	$a = \frac{1}{m+m'}$
۴۴	سطر آخر	$a = \frac{1}{m-m'}$	$a = \frac{1}{m-m'}$
۴۵	۶	$a - \frac{p}{q} = \sqrt[p]{a^p}$	$a - \frac{p}{q} = \frac{1}{q \sqrt{a^p}}$
۴۸	۱۲	فیثا	فیثا
۴۸	۲۱	$b^m + \text{زائد است}$	
۴۹	۲	a^n	b^n
۵۶	۹	$S_3 -$	$S_r =$
۶۲	۱۶	$\frac{2}{x}$	$\frac{1}{x}$
۶۴	۱۳	$-76 \times$	$-7x + 6$
۷۰	۳	$\frac{q+1}{\sqrt{q}}$	$\frac{q+1}{\sqrt{q}}$
۷۱	۳ از آخر	۱۰۰	۱۰۱
۷۴	۶ از آخر	منفی مانته‌یس	منفی و مانته‌یس
۷۹	۸	$(1+r)^m + 1$	$(1+r)^n + 1$

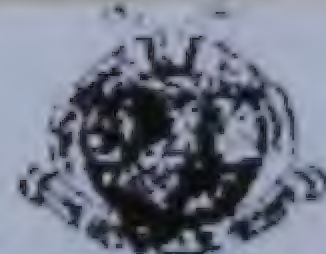
صنحه	سطر	غلط	صحیح
۷۹	سطر آخر	$(1+r)p^{-1}$	$(1+r)^{p-1}$
۸۰	۶	از	در
۸۰	سوم از آخر	حاصل	حامل
۸۳	در شکل ۶ محل تلاقی سه محور حرف ϕ گذاشته شود		
۸۳	۳	r^3	r^2
۸۴	۱۱	OPMP	OPMP'
۹۲	۱۱	V	V'
۹۳	۲	muu^{m-1}	$mu'u^{m-1}$
۹۳	۴	y	y'
۹۳	۱۱	$y' = \frac{x}{a}$	$y' = \frac{x}{a}$
۱۰۳	۲ از آخر	a	$\frac{x}{a}$
۱۰۴	۷ از آخر	من خارج هر دو کسر $a'b' - a'b$ می باشد	
۱۰۷	۱۲	MM''	MM'
۱۰۹	۷ از آخر	$x - a$	$(x - a)$
۱۰۹	۳ از آخر	α, β	α و β
۱۱۰	۴	$[a, f(e)]$	$[a \text{ و } f()]$
۲۱۰	۵	$f''(a)$	$f'(a)$
۱۱۲	۳	$+8$	$+\infty$
۱۱۸	۲	$\sin m$	$\sin mx$

غلط	سطر	دخالت
$Y =$	۴	۱۱۸
$1 + tg^2 x$	۵	۱۱۸
$\sin^2 x$	۶	۱۱۸
$-\cot g x$	۶	۱۱۸
$y = \sin^2 x$	۸	۱۱۸
$\frac{1}{2} \sin^2 x$	۸	۱۱۸
$y = tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	۹	۱۱۸
$b^2 c$	۵ از آخر	۱۲۲
$\frac{\log b}{\log a}$	۱۰	۱۲۳
$a^{\alpha^2 x}$	۳	۱۲۳
a^{α}	۳	۱۲۶
M_2	۲ سطر آخر	۱۳۱
$2K\pi$	۴ از آخر	۱۳۱
$\cot g a =$	۴ از آخر	۱۳۳
$2K\pi$	۴	۱۳۴
$a =$	۴ از آخر	۱۳۵
$1 - 3tg^2 a$	۷	۱۳۸
$\frac{b}{a}$	۹	۱۴۱
$Y -$		
$1 + tg x$		
$\sin x$		
$\cot g x$		
$y = \sin x$		
$\frac{1}{2} \sin^2 x$		
$y = tg x = \frac{1}{\cos x}$		
$b^2 c$ در مخرج		
$\frac{\log a}{\log b}$		
$a^{\alpha^2 x}$		
a^{α}		

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۱۴۱	۳ از آخر	$+b=$	$a+b=$
۱۴۴	۳	$P-o$	$P-b$
۱۴۴	۹	obc	abc
۱۴۶	۵	$l_c =$	$l_c \cos$
۱۴۹	۲ از آخر	$c-$	$-c$
۱۵۲	۷	$\cos y =$	$\cos y == a$
۱۵۳	۵	در خط از بکتوع	خط از یکنوع
۱۵۵	۷ از آخر	$\cos^3 c$	$\cos^2 c$
۱۵۶	۵	$۹۰ B$	$۹۰ - B$
۱۵۸	در شکل ۲ در محل تلاقی اضلاع a و b حرف B نوشته شود		
۱۷۳	۹ از آخر	M_1	M'
۱۷۵	۵ از آخر	$H=C$	$HC=$
۱۷۵	۳ از آخر	AH	AH''
۱۷۷	۲	$-]$	$-۱]$
۱۷۹	در شکل ۶ محل‌های B و C باهم عوض شوند		
۱۷۹	در شکل ۷ بجای L حرف P نوشته شود		
۱۸۲	۲	$ac+ba$	$ac+bd$
۱۸۳	۴	قطر	اقطار
۱۸۵	۲ و ۵	$\sqrt{۵+۱}$	$\sqrt{۵+۱}$
۱۸۵	۹	a	a'

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۱۸۵	۱۲	$a =$ و $r =$	$a' =$ و $r' =$
۱۸۶	۶ از آخر	مماس	تماس
۱۹۳	۲	ISV۰۰۰	ISo
۱۹۶	۱۰	در هر روی	در روی
۱۹۹	۴ از آخر	$\frac{Mo}{Mo}$	$\frac{Mo}{M'o}$
۲۲۱	۸	جسم	حجم
۲۲۵	۶ از آخر	اقطار می باشد	اقطاری باشد
۲۲۸	۱۳	مانند P	مانند AB
۲۲۸	۱۳	خط P	خط AB
۲۳۲	۹	در	دو
۲۳۳	۲	--	است
۲۳۴	۶	بپیچید	بپیچد
۲۳۸	۱۰	(ش ۳)	(ش ۴)
۲۳۸	۱۳	(ش ۴)	(ش ۳)
۲۴۹	۱۱	MF	MT
۲۴۹	۱۲	MT	MF
۲۵۱	۳ از آخر	محل تلاقی AB و خط عمود بر D را T' بگذارید	در (ش ۷)
۲۵۶	۳ از آخر	BA	B'A
۲۵۸	۴	M'M'	M, M'

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۲۵۸	نقطه تلاقی $A'M$ و $B'b$ رادر (ش ۷) حرف B بگذارید		
۲۶۰	۷ از آخر	خط مشترك	مشارك خط
۲۶۱	۷ از آخر	oM	oM
۲۶۲	۱۰ از آخر	در	دو
۲۷۰	۳ از آخر	ره	راه
۲۷۴	۵ از آخر	nm'	nn'
۲۷۶	۴	— صفحه	— از نقطه صفحه
۲۹۱	۵ از آخر	$\sqrt{R^2 \omega^2 - \omega^2}$	$\sqrt{R^2 \omega^2 - v^2}$
۲۹۲	۸ از آخر	b''	f''
۳۰۳	۶	دو	در
۳۰۷	۲ از آخر	$oR =$	$oR = \cdot$



ALLAMA IQBAL LIBRARY



2597

See No 2597

یادداشت

یادداشت

یادداشت

THE JAMMU & KASHMIR UNIVERSITY
LIBRARY.

DATE LOANED

Class No. 510 Book No. 2911

Vol. _____ Copy _____

Accession No. 4092

--	--	--



**ALLAMA
IQBAL LIBRARY
UNIVERSITY OF KASHMIR
HELP TO KEEP THIS BOOK
FRESH AND CLEAN.**

**University of Kashmir
Srinagar.**

1. Overdue charge of one anna per-day will be charged for each volume kept after the due date.
2. Borrowers will be held responsible for any damage done to the book while in their possession.